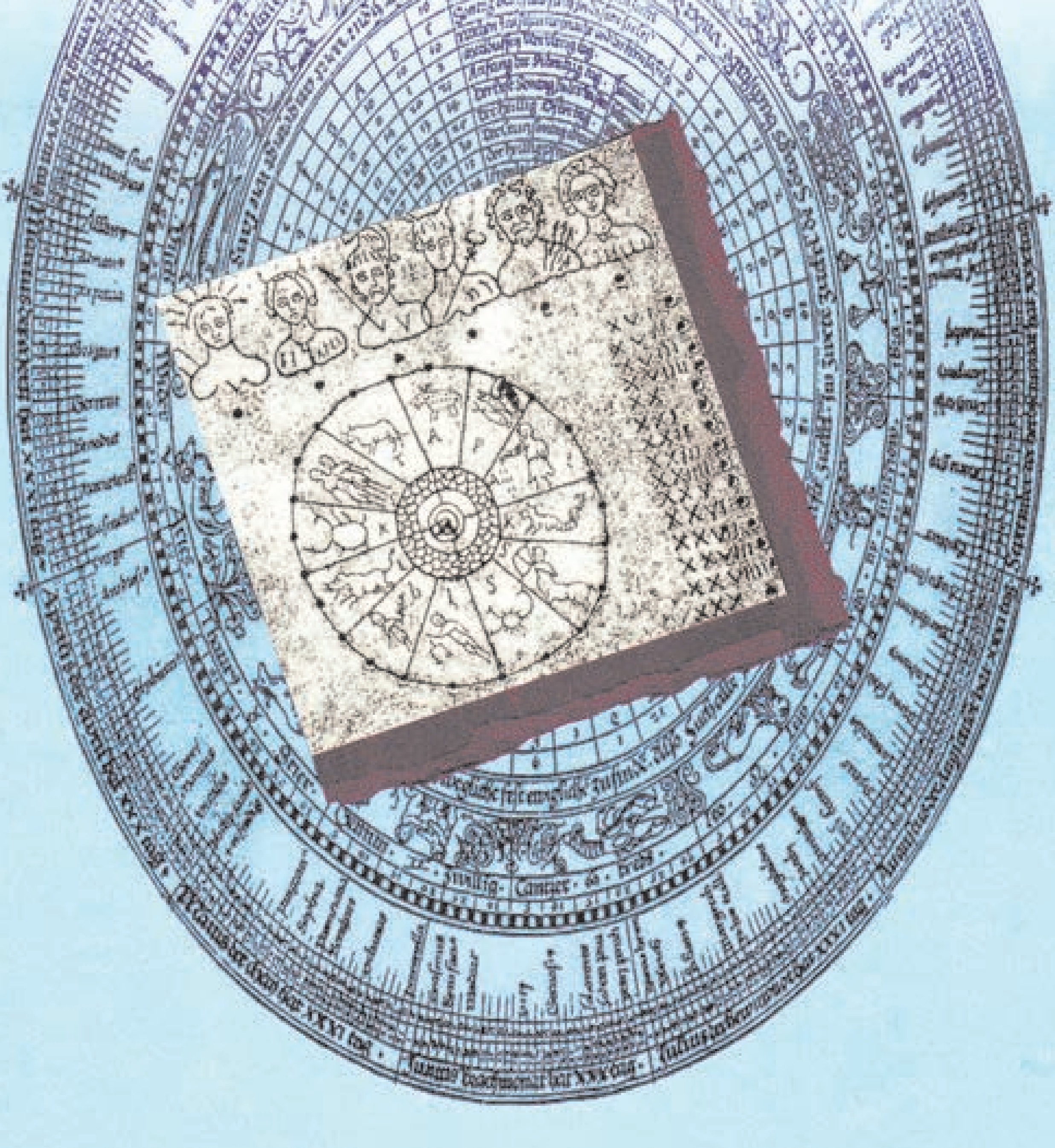
ISSN 0130-2221

МАРТ

2020 · № 3

КВАНТ

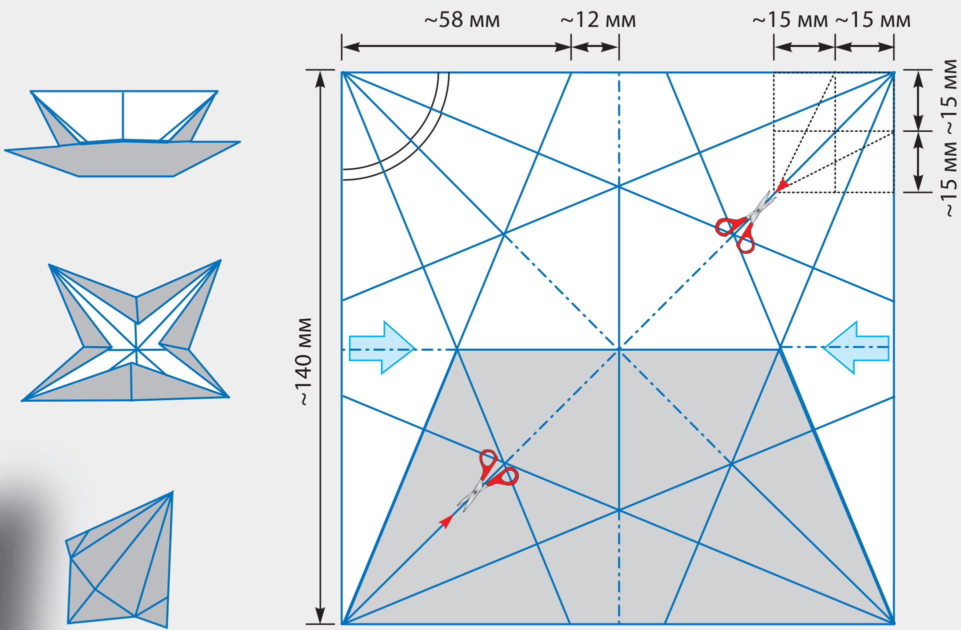
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Хороший волчок – тот, который вращается долго. Сейчас легко купить очень качественные металлические волчки, которые точно сбалансированы и имеют очень острый кончик оси для снижения трения. Если их хорошо раскрутить на гладкой твердой поверхности, то они могут вращаться минуту или даже больше!

Но оказывается, что неплохой волчок можно сделать и из плотной бумаги или картона буквально за несколько минут. Выкройка и основные этапы сборки показаны на рисунке. Вырежьте квадратный кусок картона и продавите все линии шариковой ручкой. Затем согните лист по всем этим линиям, загибая его к себе (штрихпунктирные линии должны при начале сгибания оказаться над плоскостью листа, остальные – под ней). Остается разгладить обе трапеции (одна из них выделена серым на рисунке) и соединить лепестки вместе. Скреплять лепестки можно либо скотчем, либо резинкой для плетения браслетов, которая надевается на два надреза-язычка (показаны красным на рисунке). Такие волчки можно использовать и как елочные игрушки.

С.Полозков



КВАНТ

МАРТ 2020 № 3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Различные календари. Старый и новый стили

Л.БЕЛОПУХОВ

В ПРЕДЫДУЩЕМ НОМЕРЕ ЖУРнала в статье «Календарь и астрономия» отмечалось, что древние календари были лунные, лунно-солнечные и солнечные. Наиболее древними считаются лунные календари, например календарь Китая и некоторых других соседних государств.

Календари Китая

Издавна в Китае было принято делить месяц на три декады, в каждой из которых было пять периодов по двое суток, которые носили названия «небесных ветвей» – воды, огня, металла, дерева и камня. А годичный цикл подразделялся на 12 «земных ветвей», названных именами созвездий-животных: мышь, крыса, тигр, заяц, дракон, змея, конь, овца, обезьяна, курица, собака, свинья. Мы не знаем, выбор этих созвездий был произволен или всетаки как-то связан с движением Солнца по эклиптике.

Очевидно, что двенадцать 30-суточных циклов на 5 или 6 суток короче солнечного цикла повторения времен года. По этой причине за 15 лет происходил сдвиг на целый сезон. Как решалась эта проблема в древности, неизвестно. Но не так давно в Китае были обнаружены кости животных и панцири черепах, на которых сохранились письменные знаки о календаре эпохи Шань-Инь (18–12 в. до н. э.). Знаки свидетельствовали о том, что календарь в эту эпоху был не лунным, а лунно–солнечным, в котором лунные месячные циклы уже были как-то связаны с солнечным годом.

По многим источникам историки считают, что реформа календаря была проведена еще в середине третьего тысячелетия до нашей эры. Древние хроники свидетельствуют, что в 12 веке до нашей эры в Китае была построена специальная башня для астрономических наблюдений. Тщательно фиксировались перемещения Луны и Солнца по небесному своду. Многолетние записи этих наблюдений позволили древнекитайским астрономам предсказывать лунные и солнечные затмения. Это считалось важным государственным делом (однажды за неправильные предсказания два астронома были даже преданы суду и казнены).

Но главной задачей астрономов было уточнение лунно-солнечного календаря. При переходе на этот календарь сформировавшиеся названия суток и месяцев, как земных и небесных ветвей, были перенесены на солнечные циклы – годы. Древнекитайские астрономы смогли определить, что примерно за 60 лет полностью повторяется цикличность смены времен года на протяжении годичного календаря. Появилась крупная календарная единица – 60 лет. Это и был древнейший в мире лунно-солнечный календарь. В Китае он оставался государственным календарем вплоть до 1912 года, когда его сменил календарь европейских стран. Но до сих пор половина средств массовой информации в Китае наряду с государственным европейским использует и свой старинный лунно-солнечный календарь. Да и в европейских странах есть «мода» на этот календарь, в котором каждый год имеет одно из 12 основных названий земных ветвей с подразделениями по 5 небесным ветвям. Внутри 60-летнего цикла начало каждого года перемещается в течение первых трех месяцев.

Прошлый китайский год земляной (каменной) свиньи начался 5 февраля

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200301

Астрономическая обсерватория в Пекине (1154 г.)

2019 года по нашему календарю. А текущий год стал годом металлической (белой) крысы, и начался он 25 января 2020 года. Правда, в основном европейцы полюбили названия только земных ветвей (животных), да и то, наверное, потому, что они иллюстрируются огромным ассортиментом сувенирной продукции.

Другие древние календари

Лунно-солнечный календарь действовал во многих древних государствах Ближнего Востока. Характерным его признаком стала вставка добавочного месяца в определенные моменты года. В старо-вавилонском государстве это делалось по распоряжению властей (приложения к законам Хаммурапи). Но с развитием астрономических наблюдений возникли определенные правила для этих вставок. При этом день весеннего равноденствия связывался с положением Солнца на эклиптике. Лунно-солнечный календарь использовался во всех государствах Месопотамии, в древне-еврейском государстве и в Древней Греции. И сейчас государственным календарем Израиля является лунно-солнечный календарь.

До возникновения ислама (седьмой век нашей эры) лунно-солнечный календарь действовал и в Аравии. Но страны ислама по завету его создателя Мухаммеда (571–632 гг. нашей эры) вернулись к лунному календарю. Мухаммед выбросил из истории все астрономические достижения и вернул древний календарь: «…ибо Аллах сотворил год продолжительностью в 360 дней и исключил из него шесть дней, в которые он создал небо и землю, так что этих дней нет в счете. Вставка 13-го месяца – это увеличение неверия, ибо понятное число месяцев – 12». И сейчас весь мусульманский мир, а это почти полтора миллиарда человек, живет по лунному календарю, несмотря на его неточность и неудобство.

В странах, не контактировавших с государствами Передней Азии либо по географическим причинам, либо по причине закрытости культуры, еще в глубокой древности возникли солнечные календари. Это относилось к центрально- и южно-американским государствам, а затем и к Древнему Египту. У майя и ацтеков календарные системы были очень сложными с многими единицами времени, отражавшими сельскохозяйственные работы и религиозные установления. Найдено больше 300 развалин пирамидальных башен и других древних сооружений, стены которых использовались для нанесения знаков, в том числе и связанных с календарем. Но язык этих народов с трудом поддается расшифровке. Интересно, что значительный вклад в понимание календаря майя сделал знаменитый американский физик Ричард Фейнман – это было одним из его хобби.

Календарь египтян Древнего царства, эпохи гигантских пирамид, был лунным. Но в эпоху Нового царства, во втором тысячелетии до нашей эры, египетские жрецы сумели создать солнечный календарь, осложненный ежегодным восходом яркой звезды Сириус в определенный день июля, совпадающий с началом бурного разлива Нила, главного достояния страны. По типу этого календаря в первом столетии до нашей эры в эллинистическом Египте астрономом Созигеном был создан так называемый александрийский календарь, который и стал основой современных календарей. По этому календарю длительность года была принята в 365 суток, а раз в 4 года – в 366 суток. Таким образом, средняя продолжительность года в сутках была принята как 365,25 – так называемый календарный год. В году было 12 месяцев по 30 дней, а после 12-го месяца – 5 (или раз в три года 6) дополнительных суточных вставок. Такими были и древнегрузинский и древне-армянский календари. Сейчас александрийским календарем пользуются только копты – прямые потомки древних египтян, принявшие христианство с 284 года. Копты – это значительная часть современного египетского населения (около 10%). В Египте и его столице они живут компактно, образуя как бы анклавы внутри страны, сохраняя язык и свои древние обычаи такими, какими они были в третьем веке нашей эры.

Любопытно, что солнечный календарь александрийского типа существовал во Франции во время Великой французской революции, пока Франция была республикой (1789–1799), и в короткий период Парижской коммуны (18 марта – 28 мая 1871 г.). Названия месяцев этого календаря полностью отражали сезонные изменения в погоде и в сельскохозяйственном труде, например: брюмер – месяц тумана, термидор – месяц жары, жерминаль – месяц посева, прорастания пшеницы, вандемьер – месяц сбора винограда. Каждый месяц делился на 3 декады, дни которых имели названия, состоящие из латинских слов: примиди – первый день, дуоди – второй день и т.д. Очень стройная и привлекательная календарная система! Добавочные дни имели романтические названия – праздник Гения, праздник Подвига и др. Раз в 4 года один добавочный день посвящался спортивным играм и состязаниям. Оказывается, что еще за 100 лет до появления современного олимпийского движения во Франции вспомнили об олимпийских играх Древней Греции, происходивших раз в 4 года. Неслучайно и инициатором организации современных олимпиад стал француз – Пьер де Кубертен.

Календарь Древнего Рима

Календарь Римской республики (509–27 до н.э.) был солнечным, но крайне запутанным. Римляне были очень суеверны и не любили четных чисел. Семь месяцев у них имели по 29 дней, четыре – по 31 дню, а в феврале было 28 дней. Этот месяц был назван в честь Фебрууса, этрусского бога подземного царства и римского бога очищения. В этом месяце справлялась поминальная неделя. Другие месяцы именовались либо в честь богов (Януса, Марса, Майи, Юноны), либо по номерам, начиная с пятого (квинтилис, секстилис, септембер, октобер, новембер, децембер). Исключение – априлис (раскрывающий, согреваемый Солнцем). Квинтилис (июль) был пятым по счету месяцем, поскольку год начинался с марта.

Очень сложно именовались в римском календаре дни. Недельные циклы отсутствовали. В каждом месяце было три особых дня. Все первые числа месяцев назывались *календами*, отсюда и слово «календарь». Седьмой день в длинных (по 31 дню) и пятый в остальных месяцах именовались *нонами*. А 15-е число в длинных месяцах и 13-е в остальных назывались *идами*. Дни перед этими числами были *канунами* (отсюда и наше русское «накануне»).

А остальные дни именовались очень странным образом – обратным включительным счетом. Например, 4 августа (короткого месяца, в котором ноны приходились на 5 число) называлось *кануном августовских нон*, 11 августа – *третьим днем до августовских ид* (приходящихся на 13 августа), а 23 августа – *восьмым днем до сентябрьских календ*. Интересно, что вторых дней до нон, ид и календ не существовало, они именовались канунами. Ну, а первыми днями (по включительному счету) были эти самые ноны, иды и календы.

Годовой подсчет дней древнеримского календаря дает 355 дней. Недостающие до солнечного года 10,25 суток требовали включения в календарь добавочных дней. И это мероприятие было запутано до предела.

Например, после 23 февраля вставлялся добавочный месяц длительностью в 22 или 23 дня, а по его истечении снова продолжался февральский счет дней до мартовских календ. Месяц этот назывался *марцедонием* от латинского «расплата», поскольку в этом месяце производились все денежные расчеты за минувший год. Ноны и иды в марцедонии были, как в коротком месяце, а календы и вовсе отсутствовали.

Этот порядок действовал много сотен лет. Но в начале второго века до нашей эры римские жрецы, которые управляли календарем, стали манипулировать длительностью и временем вставки этого добавочного месяца. В Римской республике весь комплекс административных должностей – консулы (высшая должность), квесторы, цензоры и т.д. – был выборным сроком ровно на один год. А поскольку эти должности приносили определенный доход и другие жизненные преимущества, продление их срока было выгодным делом. Манипулируя календарем, жрецы могли увеличивать эти сроки в пользу того или иного должностного лица, наверняка небескорыстно. Могли иметь место и экономические причины изменения времени вставки в календарь месяца расплаты.

О конкретном грядущем календаре население республики оповещалось жрецами в конце февраля. Об этом запутанном древнеримском календаре через много лет Вольтер сказал: «Римские полководцы всегда побеждали, но они никогда не знали, в какой день это случилось».

Юлианский календарь

Его установил в 46 году до нашей эры своим указом римский диктатор и верховный жрец, полководец и государственный деятель Гай Юлий Цезарь (100–44 до н.э.).

Юлий Цезарь произвел реформу календаря, прежде всего опираясь на свои права верховного жреца. За основу он взял египетский (александрийский) солнечный календарь. Семь месяцев стали иметь длительность по 31 дню, четыре месяца – по 30 дней. А один месяц имел 28 дней, но раз в четыре года – 29 дней. В году стало 365 или, раз в четыре года, 366 дней. Это

Гай Юлий Цезарь

соответствовало солнечному году в 365,25 суток. Добавочным днем раз в четыре года было не 29 февраля, как мы привыкли, а вставной день между 24 и 25 февраля, или по римскому календарю – между шестым и пятым днем до 1 марта. Он получил официальное название «дважды шестой до мартовских календ» – bis sectum Kal.Mart. Вот это самое *bis sectum* и превратилось для нас в слово *високосный*, а соответствующие годы стали впоследствии называться високосными годами. Начало года было перенесено Цезарем с 1 марта на 1 января.

Вот собственно и вся реформа. Ее четкость и простота так восхитили измученных своим календарем римлян, что в благодарность (в том числе и за военные заслуги) римский сенат переименовал месяц Квинтилис в Юлиус (в этом месяце родился Цезарь).

Через год, в мартовские иды 44 года до новой эры, Цезарь был убит заговорщиками во главе с Брутом. Началась борьба за власть между полководцами Антонием и Октавианом. Жрецы воспользовались неразберихой во власти и некоторое время продолжали «командовать» календарем по своему усмотрению, изменяя порядок високосных лет и вставку добавочного дня. И только через 50 лет юлианский солнечный календарь наконец заработал так, как это было задумано Цезарем. Это сделал полководец Октавиан, за военные и гражданские заслуги получивший от

Юлианский календарь

сената пожизненный «империй» (чрезвычайные права, которые раньше давались полководцу на короткое время военных действий). Это означало фактическое превращение республики в империю. Октавиану сенат присвоил титул императора и имя Август («преумножающий»).

Август сделал юлианский календарь государственным, обязательным на всей огромной территории Римской империи с 1 января 4 года нашей эры. Месяц *септилий* был переименован в *август* и было подправлено чередование длинных и коротких месяцев – оно стало таким, как сейчас.

Юлианский календарь просуществовал во всей Европе (и Византии) до конца XVII века. А сейчас по нему живет только ортодоксальная (православная) христианская церковь.

Необходимость изменения юлианского календаря

Так зачем же нужно было заменять юлианский календарь? Причина этого – чисто арифметическая. Юлианский календарь основан на том, что период солнечного цикла, так называемый календарный год, составляет 365,25 суток. Но с календарем должен быть связан так называемый тропический год, длительность которого чуть-чуть меньше – 365,2424 суток.

В первые века нашей эры, когда стал общепринятым юлианский календарь, казалось, что маленькая разность этих периодов несущественна и не мешает календарю. Как нетрудно определить, она приводит к сдвигу календаря на одни сутки за 128 лет. Когда постепенно исчезала власть Римской империи и потом, в «темные столетия» раннего Средневековья, этот сдвиг мало кого интересовал. Но в XVI веке, в эпоху «осени Средневековья», которую чаще называют эпохой Возрождения, человеческий быт и общественное сознание так изменились, что многие общественные деятели и ученые стали выражать беспокойство по поводу неточности календаря.

В христианском европейском мире документальным началом отсчета считается четвертый век нашей эры, когда указом римского императора Константина христианство стало государственной религией. За прошедшие после этого 12 веков сдвиг юлианского календаря составил уже больше 9 дней. Одной из причин беспокойства стало перемещение дня весеннего равноденствия с 21 марта на 12 марта. А с этим днем было связано начало многих сельскохозяйственных работ, и время подготовки к ним существенно сократилось. Весна по календарю наступала все раньше и раньше.

Но была и еще одна причина беспокойства. Она имела религиозное обоснование. В христианских общинах Римской империи к началу IV века установился обычай отмечать как самый светлый праздник ставшую легендарной дату воскресения Христа. События, связанные с казнью Христа, происходили в Иерусалиме, столице римской провинции Иудеи, в дни, являвшиеся важным иудейским праздником, называвшимся «песах». Начиная с 12 века до нашей эры в иудейской религии этот праздник отмечался как память о благополучном исходе евреев из Египта, где они считались низшей расой.

В начале нашей эры (как, впрочем, и сейчас) в Иудее продолжал действовать лунно-солнечный календарь, согласно которому весенний месяц Нисана перемещается относительно природного календаря, например относительно дня весеннего равноденствия. К последним дням песаха приурочивались и казни преступников, как праздничное «развлечение» для народа. На основании устных преданий и, по-видимому, не дошедших до нашего времени письменных свидетельств, четыре античных историка зафиксировали, что казнь Христа произошла 13 Нисана, а его воскресение – 15 Нисана 30-го года нашей эры.

В ранних христианских общинах и установился обычай ежегодно отмечать 15 Нисана еврейского календаря как праздник Светлого Воскресения. Почти во всех европейских языках этот день получил название «пасха», очень похожее на еврейское «песах».

Естественно, что еврейское 15 Нисана в юлианском календаре приходилось на разные дни. В уточняющих эту дату устных преданиях говорилось о том, что это было после дня весеннего равноденствия и первого после этого полнолуния. И в 325 году первый христианский собор (съезд всех епископов – руководителей христианских общин империи), организованный императором Константином в городе Никея и поэтому получивший имя Никейского собора, установил каноном празднование Пасхи в первое воскресенье после первого новолуния после весеннего равноденствия. По юлианскому календарю разброс дня Пасхи составил 36 дней – с 20 марта по 25 апреля. Соответственно перемещались по календарю и все связанные с Пасхой религиозные дни и установления – весенние и летние посты, день Святого Духа, Троицын день и др. Недаром они называются переходящими в отличие от постоянных в календаре (Рождество Христово, осенний пост, Благовещение и пр.).

Но когда реальные астрономические события, и прежде всего весеннее равноденствие, стали заметно (на 10 дней) не совпадать с каноном празднования Пасхи по юлианскому календарю, необходимость календарной реформы стала неотвратимой.

Григорианский календарь

Проблема календарной реформы обсуждалась католической церковью на нескольких соборах. На последнем из них был рассмотрен проект изменения календаря, подготовленный итальянским врачом и астрономом Луиджи Лилио. Суть проекта была достаточно простой. Луиджи Лилио (лат. Алоизий Лилий) не использовал аппарат «цепных дробей» (см. статью «Календарь и астрономия»), он просто подобрал в качестве добавки к 365 суткам не $1/4$, а $97/400$. Таким образом, за 400 лет число високосных лет должно быть равно не 100, как в юлианском календаре, а 97. Период в 400 лет был выбран Луиджи Лилио без всякого математического или астрономического обоснования, а из соображений удобства введения нового календаря. Для того чтобы согласие календаря с астрономическим годом стало хорошим, достаточно было каждые 400 лет убирать трое суток из 100 високосных лет. Нужно было лишь договориться, какие три високосных года станут простыми (без 29 февраля). Логичным было предложение взять те годы, две первых цифры которых не кратны четырем. Например, 1600 год в проекте реформы оставался високосным, как и 1604, 1608,…, 1696, а вот 1700 год уже не должен быть високосным. Это же относится к 1800 и 1900 годам. А 2000 год опять станет високосным. И для того чтобы «выровнять» календарь с астрономическим временем, необходимо было в какой-то момент «убрать» из календаря 10 дней. Это-то и было самым трудным в реформе для ее понимания простыми людьми. Да и не только простыми.

Для внедрения реформы во всем христианском мире нужен был авторитет выше авторитетов властителей отдельных государств. Таким авторитетом в 1570-е годы обладал только римский папа – глава католической конфессии христианства. Но несмотря на одобрение собором проекта реформы, в течение 14 лет папы Пий IV и Пий V не решились на активные действия. И только Григорий XIII (римский папа с 1572 по 1583 год), да и то не сразу после избрания, а за месяц до своей кончины 24 февраля 1582 года, издал постановление (буллу), озаглавленное «Среди важнейших» («Inter gravissimas»). Вот выдержки

Григорий XIII

из него:

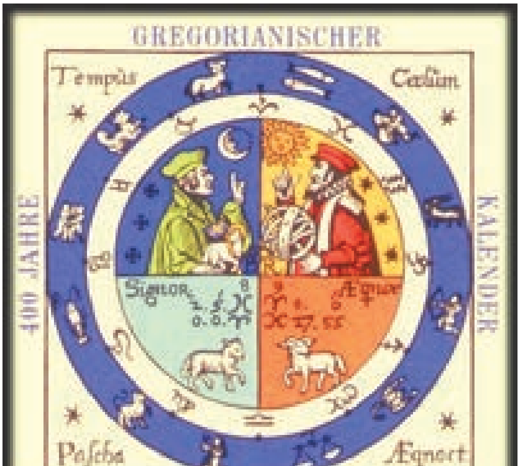
«Было заботою нашей не только восстановить равноденствие на издревле назначенном ему месте, от которого со времени Никейского собора оно отступило на десять дней приблизительно, и полнолунию вернуть его место, но и установить также способ и правило, которым и будет достигнуто, чтобы в будущем равноденствие и полная луна со своих мест никогда не сдвигались…

А посему мы предписываем и повелеваем касательно месяца октября текущего 1582 года, чтобы десять дней от третьего дня перед нонами (5 октября) до кануна ид (14 октября) включительно были изъяты».

Помимо этого был приведен в порядок и 19-летний цикл смен лунных фаз, чтобы можно было день пасхи рассчитывать заранее. Одновременно начал происходить и переход к современному счету дней от первого до последнего дня месяца.

Новая календарная система получила название *григорианской*, или *нового стиля* (*н.ст.*). А за юлианским календарем закрепилось название *старый стиль* (*ст.ст.*). В конце XVI века различие датировок событий по старому и новому стилям составляло 10 дней. Таким же оно осталось и в XVII веке, поскольку 1600 год был високосным и в старом (юлианском) и в новом (григорианском) календаре. Но уже в XVIII веке различие составляло уже 11 дней, поскольку 1700 год был в юлианском календаре високосным, а в новом календаре он високосным не был (17 не делится на 4 без остатка). По такой же причине в XIX веке разница между старым стилем и новым составляла 12 дней, а в XX веке – 13 дней. В нашем XXI веке различие по-прежнему составляет 13 дней, поскольку 2000 год был високосным в обоих календарях, но в XXII веке различие увеличится уже до 14 дней.

Григорианский календарь заметно более точен, чем юлианский. Его среднегодовая погрешность составляет всего лишь 30 секунд. Если по юлианскому календарю сдвиг весеннего равноденствия на 1 сутки происходит за 128 лет, то по григорианскому календарю такой сдвиг произойдет за 2800 лет! У григорианского календаря есть и недостатки. В частности, из-за неравномерного распределения в 400-летнем периоде трех «убранных» високосных лет дни равноденствий перемещаются по ка-



Григорианский календарь

лендарю в пределах двух-трех суток.

И вполне возможно, что уже в нынешнем столетии будет создан и внедрен другой календарь, такой же точный и в то же время более удобный. Таких проектов много, есть даже комиссия ООН, которая должна заниматься этой проблемой.

Внедрение нового стиля

Как происходило внедрение григорианского календаря? В католических странах реформа 1582 года была принята практически сразу (из-за угрозы отлучения от церкви в случае непослушания). Но в протестантских странах она вызвала бурю протестов и ожесточенную полемику даже среди ученых. Особенно ретивыми в этом проявили себя немецкие, голландские и швейцарские протестанты, которые считали, что «лучше разойтись с Солнцем, чем сойтись с папой». В то же время самый знаменитый тогда немецкий астроном Иоганн Кеплер, хоть и был протестантом, выступил за реформу. Но к нему не прислушались, и внедрение реформы календаря в протестантских странах растянулось на несколько десятков лет. Дольше всего сопротивлялась Англия, что, в частности, до сих пор вызывает неопределенность с днем рождения великого Ньютона.

Православная церковь (Константинопольская, Антиохийская, Греческая, Болгарская, Русская и др.) отказалась принять григорианскую систему и некоторые новые правила определения дня пасхи, поэтому дни православной пасхи и католической могут разниться на неделю. По григорианскому календарю самое раннее празднование пасхи – 2 апреля, а самое позднее – 8 мая. Для определения дня пасхи была еще до реформы календаря разработана система, в которой большую роль играл и 19-летний цикл календарного повторения лунных фаз. Было создано несколько арифметических систем с использованием специальных слов и обозначений. В 1800 году 23-летний будущий великий «король математиков» Карл Фридрих Гаусс предложил сравнительно простой алгоритм определения дня пасхи (его легко можно найти в интернете).

В Россию христианство пришло из Византии в конце IX века. Тогда христианская церковь была единой. Когда в XI веке произошел раскол христианства на две конфессии, Русь осталась верна византийской конфессии, которая получила название ортодоксальной (верной решениям только семи первых вселенских соборов). Сейчас в России эту конфессию христианства принято называть православной церковью. Россия сохранила верность старине и после государственного конца Византии в 1453 году. Поэтому в России не сразу состоялся переход к григорианскому календарю, тем более что католическая конфессия (церковь) христианства во главе с римскими папами была враждебна российскому государству.

До 1917 года церковь в России не была отделена от государства, но одним из первых указов новой власти был декрет об отделении церкви от государства. Имея в виду организацию мировой пролетарской революции, необходимым стал и переход на европейский григорианский календарь. Уже в ноябре 1917 года этот вопрос был поставлен на обсуждение Совнаркома, который и принял 24 января 1918 года «Декрет о введении в Российской республике западноевропейского календаря». В декрете говорилось: «В целях установления в России одинакового почти со всеми культурными народами исчисления времени Совет народных комиссаров постановляет ввести по истечении января месяца сего года в гражданский обиход новый календарь. Для этого первым днем после 31 января сего года считать не 1 февраля, а 14 февраля, вторым днем считать 15 февраля и т.д.» Заметьте, что новый календарь в декрете не был назван «григорианским», чтобы не возникал вопрос о том, что его внедрял римский папа.

Завершим эту тему словами американского астронома Г.Мойера: «Григорианский календарь представлял собою весьма удовлетворительный компромисс между необходимой точностью и крайне желательной простотой».

Обманчивая простота простых чисел

М.КОРОЛЕВ

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА… ЧТО МЫ ЗНАЕМ о них из школьного курса? Во-первых, их определение: натуральное число $n \ge 2$ называется простым, если оно имеет только два делителя – единицу и самого себя. Во-вторых, теорему Евклида о том, что множество простых чисел бесконечно. Наконец, основную теорему арифметики, согласно которой всякое целое число $n \ge 2$ разлагается в произведение степеней простых чисел, причем единственным образом с точностью до перестановки сомножителей. Ну вот, собственно, и все.

Потому неудивительно, что название «простые» приобретает в наших глазах уничижительный оттенок. Между тем, эта «простота» обманчива, и при внимательном рассмотрении простые числа оказываются совсем даже не простыми.

К слову сказать, «простой» – результат не очень удачного перевода греческого слова «протон», что значит «первичный», «основной».[1] То же название носят элементарные частицы – кирпичики нашего Мироздания. Стало быть, простые числа – это «элементарные частицы», из которых как из строительного материала построено все здание математики. Неудивительно, что знание их свойств, законов, которым они подчиняются, имеет колоссальное значение.

Задача 1. Попробуйте доказать теорему Евклида.

Асимптотический закон распределения простых чисел

В свете теоремы Евклида вопрос о том, сколько существует простых чисел, лишен смысла. Однако небольшое его видоизменение сразу приводит к серьезной задаче, над решением которой ломали головы лучшие математические умы. Пусть $x \ge 0$ – произвольное (не обязательно целое) число. Обозначим через $\pi(x)$ количество простых чисел p, не превосходящих x (рис.1). Например, $\pi(2{,}5) = 1$, $\pi(5) = 3$, $\pi(100) = 25$, $\pi(10^6) = 78498$.

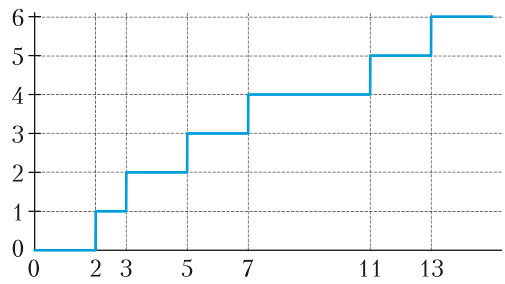


Рис. 1. График функции $\pi(x)$ на отрезке $0 \le x \le 15$

Как ведет себя функция $\pi(x)$ с ростом x? Из теоремы Евклида мы уже знаем, что $\pi(x)$ стремится к бесконечности при неограниченном возрастании x. Можно ли описать ее поведение более точно? Изучение обширных таблиц простых чисел привело в начале XIX столетия французского математика Адриена Мари Лежандра (1752–1833) к предположению о том, что

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}. \qquad (1)$$

Это соотношение нужно понимать в следующем смысле: как бы ни было мало положительное число ε, найдется x_0, зависящее лишь от ε, такое, что при всех $x \ge x_0$ отношение левой и правой частей (1) будет заключено между $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$, или, что то же,

$$(1-\varepsilon)\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < (1+\varepsilon)\frac{x}{\ln x}, \quad x \ge x_0. \qquad (2)$$

---

[1] Кстати, в английском языке простой – simple, но «простые числа» – «prime numbers» или «primes», а не «simple numbers».

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200302

Утверждение (1) называется асимптотическим законом распределения простых чисел или, сокращенно, А.З.Р.П.Ч. Он был доказан в 1896 году независимо двумя учеными – Жаком-Саломоном Адамаром (1865–1963) и Шарлем Жаном де ла Валле-Пуссеном (1866–1962). О том, как удалось это сделать, мы расскажем чуть позже.

Функции Чебышёва и Мангольдта

Важнейшей вехой на пути к доказательству А.З.Р.П.Ч. стал мемуар «О простых числах» (1850) нашего выдающегося соотечественника Пафнутия Львовича Чебышёва (1821–1894). Он содержал строгое доказательство неравенств для функции $\pi(x)$, подобных (2), но несколько менее точных. В них вместо $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$ фигурировали постоянные a и b, причем первая была чуть меньше единицы, вторая – чуть больше: $a = 0{,}92129\ldots$, $b = 1{,}10555\ldots$[2]

Еще одной заслугой Чебышёва стало введение важной функции, которая обозначается $\psi(x)$ и с тех пор носит его имя. В свою очередь, функция Чебышёва $\psi(x)$ тесно связана с еще одной арифметической функцией – на этот раз названной в честь немецкого математика Ганса Карла Фридриха фон Мангольдта (1854–1925). Поскольку обе они очень важны для дальнейшего рассказа, остановимся на них подробнее.

Функция Мангольдта $\Lambda(n)$ определяется следующим образом: если n – степень простого числа, т.е. $n = p^k$, где $k \ge 1$, то полагают $\Lambda(n) = \ln p$; во всех остальных случаях $\Lambda(n) = 0$. Вот ее значения на первом десятке натуральных чисел: $\Lambda(1) = \Lambda(6) = \Lambda(10) = 0$, $\Lambda(2) = \Lambda(4) = \Lambda(8) = \ln 2$, $\Lambda(3) = \Lambda(9) = \ln 3$, $\Lambda(5) = \ln 5$ и, наконец, $\Lambda(7) = \ln 7$.

Задача 2. Докажите тождество $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$ (символ $d|n$ означает суммирование по всем делителям d числа n).

[2] В 1881 году английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) установил еще более тесные границы для $\pi(x)$ при всех достаточно больших x: $a = 0{,}95095\ldots$, $b = 1{,}04423\ldots$

Теперь можно определить и $\psi(x)$ – это сумма значений $\Lambda(n)$ по всем натуральным числам n, не превосходящим x:

$$\psi(x) = \sum_{1 \le n \le x} \Lambda(n).$$

«Да чем же она хороша?» – впору спросить нам вслед за поэтом Ярославом Смеляковым. Дело в том, что А.З.Р.П.Ч. можно формулировать и в терминах $\psi(x)$, причем соответствующая формулировка выглядит существенно проще (1):

$$\psi(x) \sim x. \qquad (3)$$

Задача 3. Попробуйте доказать, что утверждения (1) и (3) равносильны.

На рисунках 2 и 3 представлены графики функции Чебышёва на отрезках

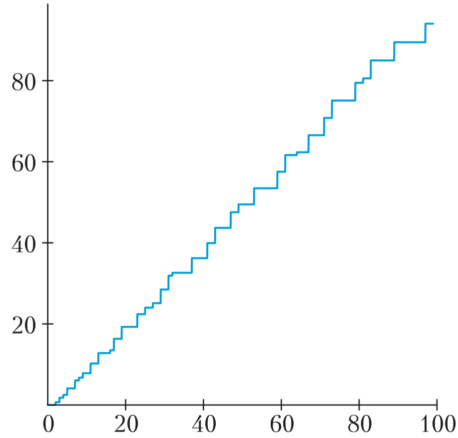


Рис. 2. График функции $\psi(x)$ на отрезке $0 \le x \le 100$

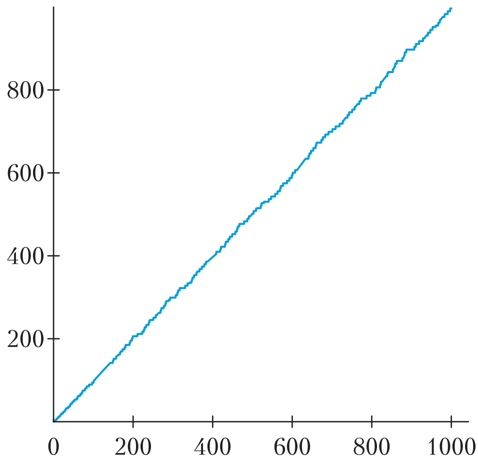


Рис. 3. График функции $\psi(x)$ на отрезке $0 \le x \le 1000$

$0 \le x \le X$, $X = 100$ и $X = 1000$. Если на первом из них «ступеньки», возникающие благодаря скачкам в точках вида $x = p^k$, видны, что называется, невооруженным глазом, то второй график практически неотличим от прямой $y = x$.

Дзета-функция Римана

Теперь самое время перейти к рассказу о том, как же был доказан А.З.Р.П.Ч. Но для этого нам нужно познакомиться с новым персонажем – дзета-функцией Римана $\zeta(s)$. Для $s > 1$ значение дзета-функции определяется как сумма бесконечного числа слагаемых:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (4)$$

Задача 4. а) Докажите, что при любом фиксированном $s > 1$ эта сумма конечна.

Замечание. Таким образом, последовательность частичных сумм

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

монотонно возрастает и ограничена сверху и, по известной теореме курса математического анализа, имеет предел, который и объявляется значением $\zeta(s)$.

б) Докажите, что сумма

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}$$

выбором N может быть сделана большей любого наперед заданного числа (этим и объясняется ограничение $s > 1$ в формуле (4)).

Выражения вида $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называются бесконечными рядами. Ряды, подобные (4), встречались математикам уже в XVII столетии. Например, знаменитая «базельская задача»[3], поставленная в 1644 году итальянским математиком Пьетро Менголи (1626–1686), состоит в нахождении точного значения суммы обратных квадратов, т.е. $\zeta(2)$. Решение этой задачи, найденное в 1735 году Леонардом Эйлером (1707–1783), привело к открытию целого ряда замечательных формул, в числе которых – равенства

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},\ \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

и т.д.[4] Другим замечательным открытием Эйлера стало следующее тождество, носящее теперь его имя:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots\right),\ s > 1.$$

В правой части этого тождества стоит бесконечное произведение по всем простым числам. Этот удивительный факт содержит намек на глубинную связь, которая имеется между ними и дзета-функцией.

Задача 5. Попробуйте доказать тождество Эйлера.

Возникает законный вопрос: если дзета-функцию столь плодотворно исследовал Эйлер, то почему она названа в честь Римана? Дело в том, что именно немецкий математик Бернхардт Риман (1826–1866) стал исследовать $\zeta(s)$ как функцию комплексного переменного.

Немного о комплексных числах

Здесь уместно сделать небольшое отступление и напомнить читателю о том,

[3] Название задачи объясняется тем, что она получила широкую известность среди европейских математиков лишь в конце XVII столетия благодаря Якобу Бернулли (1655–1705), профессору Базельского университета.

[4] О том, как Эйлер пришел к этим удивительным равенствам, можно прочесть, например, в статье Н.Виленкина «В таинственном мире бесконечных рядов» («Квант», 1989, №10). Их строгое доказательство с помощью средств, не выходящих за рамки школьной программы, читатель сможет найти в книге А.М.Яглома и И.М.Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (М.: ГИТТЛ, 1954 (решение задачи №143)).

что представляют собой комплексные числа.[5] Для начала на них можно смотреть как на формальные суммы вида $z = x + iy$, где x, y – вещественные числа, а i – некий новый объект, который называется мнимой единицей и удовлетворяет равенству $i^2 = -1$. Для таких сумм можно определить операции сложения, вычитания, умножения и деления так, что получится весьма стройная и красивая теория. Например, оказывается, что любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет во множестве комплексных чисел ровно n корней (с учетом кратности).

Комплексные числа удобно изображать точками на плоскости, сопоставляя числу $z = x + iy$ точку с координатами $(x; y)$. При этом величины x и y называют, соответственно, вещественной и мнимой частями комплексного числа z, а расстояние от начала координат до такой точки, равное $\sqrt{x^2 + y^2}$, называют его модулем. Горизонтальную ось, по которой откладываются вещественные части комплексных чисел, называют вещественной осью, вертикальную ось – мнимой, а саму плоскость – комплексной плоскостью. Точка $(x; -y)$, симметричная точке $(x; y)$ относительно вещественной оси, отвечает числу $x - iy$, которое называется сопряженным к числу z и обозначается $\bar{z}$.

Заметим, что привычные нам вещественные числа прекрасно чувствуют себя в новом мире: их можно представлять себе как комплексные числа с нулевой мнимой частью.

Отметим, наконец, что многие хорошо знакомые нам функции, такие как многочлен, экспонента, синус, косинус, логарифм и прочие, можно определить и для комплексного аргумента. Изучение их свойств составляет предмет теории функций комплексной переменной, имеющей массу приложений в математике и физике. Важное место в этой теории занимают вопросы, связанные с нахождением комплексных корней уравнений вида $f(z) = 0$, где $f(z)$ – та или иная функция. Такие корни принято называть нулями $f(z)$.

[5] Более полное представление о том, что такое комплексные числа и как они применяются при решении различных задач, заинтересованный читатель может получить, например, из статьи С.Дориченко «Комплексные числа» («Квант», 2008, №5).

Дзета-функция Римана и ее нули

Так вот, Риман указал способ, которым можно определить значение $\zeta(s)$ в любой точке $s = \sigma + it$ комплексной плоскости, за исключением разве что $s = 1$, так, чтобы получившаяся функция задавалась рядом (4) при всех вещественных $s > 1$ и вместе с тем для всех s сохраняла ряд важных свойств, присущих (4).

При этом оказалось, что у дзета-функции имеется бесконечно много нулей, образующих два множества. Первое составляют «тривиальные», или вещественные нули в точках вида $s = -2, -4, -6, \ldots$ Все вещественные нули имеют кратность 1, и поведение дзета-функции в окрестности каждого из них хорошо известно.

Главную же загадку дзета-функции Римана таят нули второго множества. Все они лежат в узкой вертикальной полосе вида $0 \leq \sigma \leq 1$ и расположены симметрично относительно вещественной оси и вертикальной прямой $\sigma = 0{,}5$ (рис.4). Иными словами, если $\rho = \beta + i\gamma$ – такой нуль, то нулями $\zeta(s)$ будут и точки

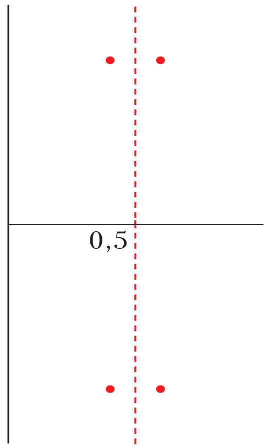


Рис. 4. Гипотетическая симметрия нулей дзета-функции Римана: если $\zeta(s)$ имеет нуль вне критической прямой, то точки, симметричные ему, также будут нулями

$$\bar{\rho} = \beta - i\gamma,\ 1 - \bar{\rho} = 1 - \beta + i\gamma,$$
$$1 - \rho = 1 - \beta - i\gamma.$$

Вот эти-то загадочные нули, называемые «нетривиальными», или комплексными, тесно связанны с чисто арифметическими объектами – простыми числами. И первым, кто эту связь обнаружил, был Риман. Он вывел точную формулу, которая выражает функцию $\pi(x)$ через нули $\zeta(s)$.

Так как формула Римана в первоначальном ее виде достаточно сложна, мы приведем ее аналог для функции Чебышёва. Если $x > 1$ – нецелое число, то

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \ln 2\pi, \quad (5)$$

где в правой части стоит бесконечная сумма по всем нетривиальным нулям.

Сразу отметим, что в таком виде эту формулу почти не используют: управиться с бесконечным числом столь необычных слагаемых достаточно трудно. Поэтому (5) заменяют менее точной, но более удобной формулой, в которой участвует лишь конечное число нулей. Именно, если $x \geq 2$, а T – произвольный параметр, подчиненный условиям $2 \leq T \leq x$, то

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + r(x,T),$$
$$|r(x,T)| \leq c\frac{x}{T}(\ln x)^2, \quad (6)$$

где c – некоторая постоянная. (Напомним, что γ – мнимая часть ρ.) Таким образом,

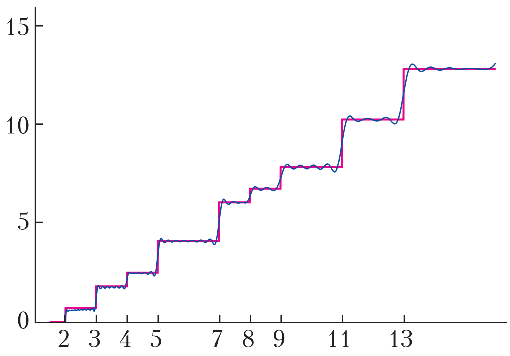


Рис. 5. Приближение функции Чебышёва, в котором участвуют первые 50 *нулей дзета-функции*

суммирование ведется по всем нулям дзета-функции, чья мнимая часть не превосходит T (рис.5).

Доказательство А.З.Р.П.Ч.

Введем еще одно обозначение: $R(x) = \psi(x) - x$. Несложно сообразить, что А.З.Р.П.Ч. будет доказан, если показать, что

$$|R(x)| < \varepsilon x \quad (7)$$

для сколь угодно малой постоянной ε и всех $x \geq x_0(\varepsilon)$. Но формула (6) как раз дает явное выражение для $R(x)$. Попробуем понять, как можно воспользоваться им для доказательства (7).

Вновь полагая $\rho = \beta + i\gamma$, будем иметь

$$\frac{x^{\rho}}{\rho} = \frac{x^{\beta} \cdot x^{i\gamma}}{\beta + i\gamma} = \frac{x^{\beta} \cdot e^{i\gamma \ln x}}{\beta + i\gamma}.$$

Согласно формуле Эйлера,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Вспоминая определение модуля комплексного числа, получаем

$$\left|e^{i\varphi}\right| = \sqrt{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2} = 1.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{x^{\rho}}{\rho}\right| = \frac{x^{\beta}}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \leq \frac{x^{\beta}}{|\gamma|}$$

и, стало быть,

$$|R(x)| \leq 2\sum_{0<\gamma\leq T} \frac{x^{\beta}}{\gamma} + c\frac{x}{T}(\ln x)^2.$$

Коэффициент 2 нужен для того, чтобы учесть симметрию нулей: для каждого нуля с мнимой частью γ будет и симметричный нуль с мнимой частью $(-\gamma)$. На последнее слагаемое можно в данном случае не обращать внимания: беря T достаточно большим, его можно сделать исчезающе малым по сравнению с x. Опасности, что в знаменателе суммируемых дробей окажется величина, близкая к нулю, нет: наименьшая из положительных ординат γ приближенно равна 14,13…, что было известно еще Риману. Наконец, если β_0 –

наибольшая из вещественных частей β тех нулей, мнимая часть которых не превосходит T, то

$$\left|R(x)\right| \ll x^{\beta_0} \sum_{0<\gamma\leq T} \frac{1}{\gamma}. \qquad (8)$$

Символ $\ll$ называется знаком Виноградова. Этот знак употребляется тогда, когда математикам неохота вычислять точную константу в подобных неравенствах. Более точно, пишут $A \ll B$, если $|A| \leq cB$ для некоторой положительной постоянной c. Это удобно: позволяет сосредоточиться на главном и не отвлекаться на детали.

Кстати, о главном: сумма величин, обратных ординатам в (8), не доставляет особых проблем; можно показать (мы делать этого не будем), что она не превосходит по порядку $(\ln T)^2$. Поэтому главное – величины β: вся трудность – в них!

Как уже говорилось выше, все нетривиальные нули «живут» в полосе $0 \leq \beta \leq 1$. Но такая оценка для нас бесполезна: она «перевесит» главный член в выражении для $\psi(x)$, т.е. x. Вот если бы удалось ее улучшить…

Оказывается, чтобы доказать А.З.Р.П.Ч., достаточно «всего лишь» строгого неравенства $\beta < 1$ или, что то же, достаточно доказать, что дзета-функция Римана не имеет нулей на «единичной прямой» $\sigma = 1$. Именно это и было сделано Адамаром. Валле-Пуссен смог установить более точный факт: оказывается, $\zeta(s)$ не имеет нулей и в некоторой (хотя и очень узкой) окрестности единичной прямой вида

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_0}{\ln|t|},\ |t| > 14, \qquad (9)$$

где c_0 – положительная постоянная (рис.6). Ширина этой окрестности становится исчезающее малой по мере продвижения вверх (или, наоборот, вниз) по единичной прямой. Тем не менее, этот факт позволил получить для остаточного члена $R(x)$ оценку, гораздо более точную, чем (6), а именно:

$$R(x) \ll xe^{-c\sqrt{\ln x}}, \qquad (10)$$

где, как обычно, c – некоторая константа (ее можно выразить через c_0). Несложно

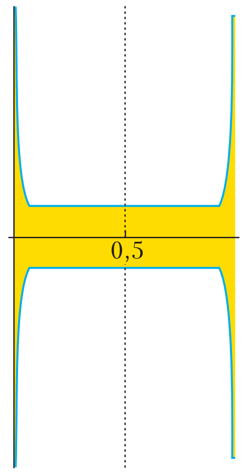


Рис. 6. Область, «свободная» от нулей

видеть (проверьте это!), что правая часть (10) хотя и растет быстрее любой функции вида $x^{1-\delta}$, но делает это куда медленнее, чем всякая функция $x(\ln x)^{-A}$ (здесь $0 < \delta < 1$, $A > 0$ – произвольные постоянные).

Граница (9) получена более 120 лет назад. С тех пор наши знания о нулях $\zeta(s)$ существенно пополнились, и неравенство (10) теперь можно заменить более точным:

$$R(x) \ll x\exp\left(-\frac{(\ln x)^{0,6}}{58(\ln\ln x)^{0,2}}\right). \qquad (11)$$

И это все?!

«И это все?!» – спросите вы. По сути, да: за все это время показатель степени логарифма удалось сдвинуть, грубо говоря, на одну десятую, с 0,5 до 0,6 (если не обращать внимания на двойной логарифм)[6]. Но для этого потребовались усилия боль-

[6] У математиков даже есть поговорка: все знают, что двойной логарифм стремится к бесконечности, но никто не видел, как он это делает. Хотя функция $y = \ln\ln x$ может принимать сколь угодно большие значения, в области вычислений, доступной современным компьютерам, ее рост практически незаметен. Так, например, при изменении x от 10 до 10^{30} величина y изменяется примерно с 0,83 до 4,23.

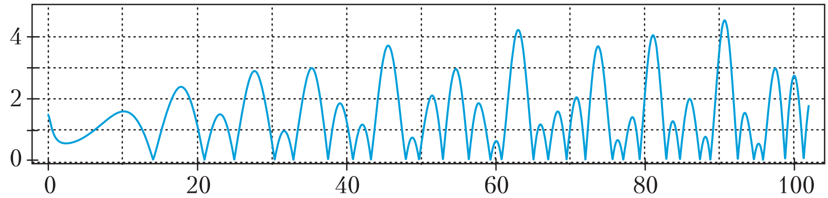


Рис. 7. Дзета-функция Римана на критической прямой – график функции $|\zeta(0{,}5 + it)|$ *на отрезке* $0 \le t \le 102$

шого числа ученых. Решающую роль в этой деятельности сыграл метод тригонометрических сумм, созданный выдающимся советским математиком Иваном Матвеевичем Виноградовым (1891–1983). Метод Виноградова нашел применение и в решении огромного числа других задач теории чисел.

Итак, распределение простых чисел диктуется расположением нулей дзета-функции Римана. Вычисления, начало которым положил сам Риман, показывают, что все известные к настоящему времени нули (а таких уже более 10 триллионов!)[7] имеют одну и ту же вещественную часть: $\beta = 0{,}5$ (рис.7). Риман предположил, что этим свойством обладают абсолютно все нетривиальные нули $\zeta(s)$, и это предположение, известное сейчас всему математическому миру как гипотеза Римана, до сих пор не доказано и не опровергнуто.

Гипотеза Римана вошла в число «проблем Гильберта» – кардинальных математических задач, представленных Давидом Гильбертом (1862–1943) на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году. Спустя ровно сто лет она единственная из всего этого списка оказалась в числе семи «проблем тысячелетия», отобранных Математическим институтом Клея.

Будет ли доказана гипотеза Римана в обозримом будущем или нет – непонятно. Но математикам уже сейчас интересно, что получится, если она все же верна. Посмотрим, например, что даст гипотеза Римана в задаче об оценке $R(x)$. Полагая $T = x$ в неравенстве (8), получим

$$R(x) \ll \sqrt{x}\,(\ln x)^2. \qquad (12)$$

Эта оценка по своей точности оставляет далеко позади все современные результаты. К слову, улучшить ее практически невозможно: это доказал в 1914 году английский математик Джон Идензор Литтлвуд (1885–1977).

Обратим внимание и на то, что неравенство (12) куда приятней для глаз, чем неудобоваримые экспоненты в оценках (10) и (11).

Такой же эффект наблюдается и во многих других задачах теории чисел, так или иначе связанных с нулями дзета-функции. Это, по мнению некоторых ученых, является лишним подтверждением справедливости гипотезы Римана.

Знание свойств нулей $\zeta(s)$ помогает решать и другие задачи теории простых чисел. Пусть, например, x неограниченно возрастает. При каком наименьшем h (как функции x) промежуток $(x; x+h]$ гарантировано будет содержать простые числа? При $h = x$ соответствующее утверждение было высказано в 1845 году французским математиком Жозефом Бертраном (1822–1900) и спустя пять лет доказано Чебышёвым. Из (10) и (11) существование простых чисел на таком «коротком» промежутке будет следовать из А.З.Р.П.Ч., если только величину h взять чуть большей, чем правые части неравенств для $R(x)$. Наконец, гипотеза Римана дает утвердительный ответ на этот вопрос уже при $h \ge c\sqrt{x}\,(\ln x)^2$, если только постоянная c достаточно велика. Но можно ли утверждать что-то подобное, скажем, в случае $h = x^{0{,}99}$, не опираясь на гипотезу Римана?

[7] Стоит заметить, что ордината нуля с номером $n = 10^{13}$ немногим меньше двух с половиной триллионов.

1	14,134725142	16	67,079810529
2	21,022039639	17	69,546401711
3	25,010857580	18	72,067157674
4	30,424876126	19	75,704690699
5	32,935061588	20	77,144840069
6	37,586178159	21	79,33737502
7	40,918719012	22	82,910380854
8	43,327073281	23	84,735492981
9	48,005150881	24	87,425274613
10	49,773832478	25	88,809111208
11	52,970321478	26	92,491899271
12	56,446247697	27	94,651344041
13	59,347044003	28	95,870634228
14	60,831778525	29	98,831194218
15	65,112544048	30	101,317851006

Первые 30 положительных ординат нулей дзета-функции Римана

Оказывается, можно! Более точно, можно доказать аналог А.З.Р.П.Ч. вида

$$\pi(x+h)-\pi(x)\sim\frac{h}{\ln x} \qquad (13)$$

уже при $h \geq x^a$, где $1 \geq a > 7/12$ – произвольная постоянная. Соотношение (13) нужно понимать так: зафиксировав любое число a из этого промежутка и задавшись любой сколь угодно малой постоянной $\varepsilon > 0$, можно указать величину x_0, зависящую только от a и ε, такую, что при любом $x \geq x_0$ и любом h, $x^a \leq h \leq x$, отношение левой части (13) к правой будет заключено между $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$. Иначе говоря, «короткий» промежуток $(x; x+h]$ будет содержать громадное количество простых чисел.

Обратите внимание: $7/12$ отделено от $1/2$ (которую дает гипотеза Римана) на сущий пустяк: $1/12$! Дело в том, что если остаточный член $R(x)$ в А.З.Р.П.Ч. может «испортить» один-единственный нуль с большой вещественной частью (точнее, пара симметричных нулей), то в задаче о простых числах на коротком промежутке это уже не так важно. Здесь главную роль играет то, насколько «плотно» расположены такие нули. Иначе говоря, для этой задачи необходимы «плотностные теоремы» – верхние оценки количества возможных нулей $\zeta(s)$, вещественная часть β которых не превосходит заданной величины σ, $0,5 \leq \sigma < 1$, а мнимая часть не превосходит растущего параметра T. Первые утверждения такого рода были доказаны еще в 1930-е годы. К настоящему времени получено большое количество различных плотностных теорем, которые играют важную роль в теории чисел.

Доказательство гипотезы Римана привело бы к значительным продвижениям в решении многих математических проблем. В настоящее время известно большое количество «условных» утверждений, которые нетерпеливые математики доказывают в предположении («при условии»), что гипотеза Римана верна. Примером условного утверждения служит оценка (12). Однако не стоит думать, что появление доказательства этой удивительной гипотезы оставит без работы специалистов по теории чисел. На самом деле имеется много вопросов, пролить свет на которые не в силах даже она. В их числе – гипотеза о простых числах-близнецах, согласно которой существует бесконечно много простых чисел p, для которых число $p+2$ также будет простым; бинарная гипотеза Гольдбаха, утверждающая, что всякое четное натуральное число, большее 4, есть сумма двух нечетных простых чисел; гипотеза Лежандра о том, что между любыми двумя квадратами натуральных чисел имеется по крайней мере одно простое; вопросы бесконечности множеств простых чисел вида n^2+1 и 2^n-1 и еще многое-многое другое!

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2594 – М2597 предлагались на региональном этапе XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задачи Ф2601–Ф2604 предлагались в этом году на первом туре Московской олимпиады школьников по физике.

Задачи М2594–М2597, Ф2601–Ф2604

М2594. Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$ – положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n, что $m \sin x + n \cos x$ – натуральное число.

Н.Агаханов

М2595. а) Коля и Дима играют в игру на доске 8×8, делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (*доминошками*) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т.е. в клетку, в которой еще не нарисован крестик и которая еще не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две соседние клетки (еще не накрытые другими доминошками), в которых суммарно четное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

б) Та же игра и тот же вопрос, но, в отличие от пункта а), первый ход делает Коля.

М.Дидин

М2596. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Докажите, что диаметр окружности ω не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD.

О.Южаков

М2597. Пусть p – простое число, большее 3. Докажите, что найдется натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py + 1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y.

М.Антипов

Ф2601. Герметичный сосуд заполняют смесью воздуха и водяного пара и начинают охлаждать в термостате с тающим льдом. В процессе охлаждения измеряют температуру в сосуде с погрешностью $\Delta T = 0{,}5\ ^\circ\text{C}$ и давление – с погрешностью $\Delta p = 0{,}05 \cdot 10^5$ Па. В результате получают таблицу:

$t, ^\circ\text{C}$	137	123	109	82	55	27	0
$p, 10^5$ Па	1,5	1,45	1,4	1,3	0,8	0,7	0,6

Определите отношение количества воды к количеству воздуха в сосуде, а также плотность газовой фазы в начале и в конце процесса. Учтите, что давление насыщенных паров воды, равное 1 кПа, достигается при температуре около 7° С. Молярные массы воды и воздуха равны соответственно 18 г/моль и 29 г/моль.

П.Крюков

Ф2602. В последние годы большой интерес у энтузиастов, занимающихся научно-техническим творчеством, вызывает устройство под названием «вакуумная пушка». В полипропиленовой водопроводной трубе *2* (рис.1), один конец которой герметично закрыт заглушкой из фольги *3*, а другой открыт в атмосферу, разностью давлений ускоряется шарик *1* для игры в пинг-понг. Внутренний диаметр трубы близок к диаметру шарика. Рядом с заглушкой располагается штуцер *4*, через который труба соединяется с вакуумным насосом. Таким образом, справа от шарика давление очень низкое, а у открытого конца трубки – давление близко к атмосферному, которое равно p_0. Оказывается, что при достаточно большой длине трубки и качественной откачке шарик можно разогнать до высокой скорости, так что он легко разорвет фольгу заглушки и вылетит из трубки. В одном видеоролике, доступном в сети, демонстрируется, как вылетающий из трубки шарик пробивает пустые банки из-под газировки, поставленные на небольшом расстоянии от трубки.

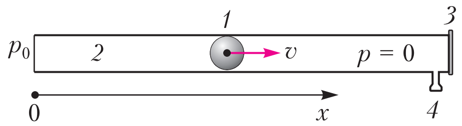


Рис. 1

1) В самой грубой модели предполагается, что слева от шарика давление $p_0 = 10^5$ Па, а справа оно равно нулю. Разность давлений не меняется в процессе разгона шарика. Трения между шариком и стенками трубы нет. До какой максимальной скорости $v_{max}^{(1)}$ может быть разогнан шарик массой $M = 2{,}7$ г и диаметром $d = 40$ мм в трубе длиной $L = 2$ м?

В более точной модели считается, что под действием постоянной разности давлений ускоряется не только шарик, но и воздух массой $m(t)$, располагающийся в момент t в трубе слева от шарика, а также вовлекаются в движение новые порции воздуха из атмосферы. Предлагается считать, что область вблизи левого торца трубы, в которой воздух вовлекается в движение, имеет малый характерный размер, сопоставимый с диаметром трубы. Снаружи трубы вне этой области воздух остается неподвижным. Внутри трубы воздух движется со скоростью шарика, а его плотность равна плотности воздуха ρ снаружи. Диаметр шарика много меньше длины трубы. В начальный момент времени координата x шарика и его скорость равны нулю.

2) Определите более точное значение скорости $v_{max}^{(2)}$, до которой может быть разогнан шарик. Время разгона в первом приближении можно считать равным времени разгона в п.1). Температура воздуха и его молярная масса равны $T_0 = 293$ К и $\mathrm{M} = 29$ г/моль соответственно.

3) Считая известными только температуру T_0 снаружи трубы и молярную массу воздуха, определите максимальную скорость, до которой может быть разогнан шарик. Длина трубы предполагается достаточно большой.

4) Даны параметры M, S, p_0, ρ, M. Получите формулу зависимости координаты шарика от времени $x(t)$.

Примечание. Может оказаться полезной формула $\Delta\left(x^2\right) = 2x\Delta x$, справедливая для малых изменений (Δx и x) величины x.

П.Крюков

Ф2603. В цепи, схема которой изображена на рисунке 2, в начальный момент времени конденсатор емкостью $3C = 300$ мкФ заряжен до напряжения $U_0 = 12$ В, конденсаторы емкостями C и $2C$ не заряжены, переключатель $П$ находится в среднем положении. Переключатель перекидывают сначала в положение 1 на короткое время (много меньшее RC), а затем в положение 2 на гораздо большее время. Определите заряды конденсаторов после многократного повторения этих двух операций. Найдите приближенно, какое ко-

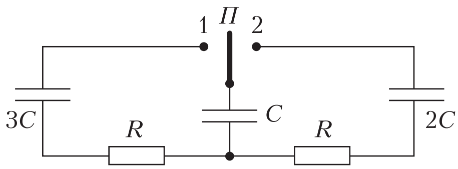


Рис. 2

личество теплоты выделяется в каждом из резисторов.

П.Крюков

Ф2604. Наблюдатель видит изображение Солнца в полированном металлическом шаре (рис.3). Угловая высота Солнца над

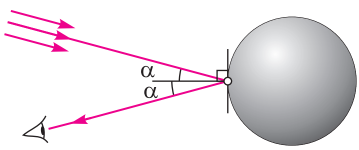


Рис. 3

горизонтом равна α и равна углу между линией зрения и горизонтальной нормалью к шару. Определите характерный размер изображения Солнца, если радиус шара R, а угловой размер Солнца φ ($\varphi \ll \alpha$).
Примечание. Для малого угла φ справедливы приближенные формулы $\cos\varphi \approx 1$ и $\sin\varphi \approx \varphi$.

А.Бычков, П.Крюков

Решения задач М2582–М2585, Ф2589–Ф2592

М2582. *Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на число $3x+1$, либо на число $\left[\frac{x}{2}\right]$. Докажите, что если вначале написано 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число.*

Введем операции, обратные данным в условии: пусть операция A число вида $3x+1$ превращает в x, операция B число x превращает в $2x$, а операция C число x превращает в $2x+1$. Докажем индукцией по n, что каждое из чисел 1, 2, …, n можно несколькими операциями типа A, B или C превратить в 1.
При $n = 1$ доказывать нечего. Докажем переход индукции: предполагая, что для чисел $1, 2, \ldots, n-1$ утверждение доказано, достаточно показать, как действовать с числом n. Рассмотрим отдельно случаи разных остатков при делении n на 3.
1) При $n = 3k$ имеем $3k \xrightarrow{C} 6k+1 \xrightarrow{A} 2k$. Так как $2k < 3k = n$, по предположению индукции число $2k$ можно далее операциями A, B, C превратить в 1.
2) При $n = 3k+1$ имеем $3k+1 \xrightarrow{A} k$, и так как $k < 3k+1 = n$, число k далее можно превратить в 1.
3) При $n = 3k+2$ имеем $3k+2 \xrightarrow{B} 6k+ +4 \xrightarrow{A} 2k+1$, и так как $2k+1 < 3k+2 = n$, переход доказан.
Задача решена.
Заметим, что из решения легко предъявить алгоритм получения из 1 фиксированного натурального числа заданными в условии задачи операциями.

В.Новиков

М2583. Решение будет опубликовано позже.

М2584. *Имеется 2019 коробок. Изначально коробки пустые. За одну операцию можно в некоторые 100 коробок добавить ровно по 100 камней и еще в несколько (возможно, ни в одну) других коробок – по одному камню. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы во всех коробках стало поровну камней?*

Ответ: 105.
Пример. Опишем сначала, в какие коробки будем класть по 100 камней. Занумеруем коробки остатками при делении на 2019 (так что, например, коробки с номерами a и a + 2019 – это одна и та же коробка). На первом ходе положим по 100 камней в коробки 1,2, …, 100, на втором – в коробки 101,102, …, 200 и т.д., на 105 ходе – в коробки 10401,10402, …, 10500. Поскольку $10500 = 5 \cdot 2019 + 405$, это означает, что за 105 ходов в коробки 1, 2, …, 405 мы положили 6 раз по 100 камней, а в остальные коробки – 5 раз по 100 камней.
Теперь скажем, как и в какие коробки добавлять по одному камню. За каждый ход положим один камень в каждую из коробок 406, 407, …, 2019, в которую на этом ходе не кладется 100 камней. Таким образом, после 105 ходов во всех коробках окажется по 600 камней.
Оценка. Пусть после N ходов в коробках оказалось поровну камней. Покажем, что $N \geq 105$. Если за ход в коробку добавили

100 камней, то скажем, что для данной коробки этот ход *удачный*, а иначе, если в коробку за ход добавили 0 камней или 1 камень, то скажем, что для данной коробки этот ход *неудачный*. Пусть для какай-то коробки было выполнено наибольшее количество удачных ходов, обозначим это количество через s. Рассмотрим случаи.

1) Пусть для каждой коробки количество удачных ходов равно s. По условию задачи каждый ход является удачным ровно для 100 коробок, поэтому $100N = 2019s$, и поскольку 100 и 2019 взаимно просты, N делится на 2019 и поэтому $N \geq 2019$.

2) Пусть найдется коробка, для которой количество удачных ходов не превосходит $s-2$. Тогда количество камней в ней после N ходов оценим сверху как $100(s-2)+N$. В то же время в первой коробке после выполнения N ходов камней будет не менее $100s$. Имеем $100(s-2)+N \geq 100s$, откуда $N \geq 200$.

3) Остается рассмотреть случай, когда для некоторых $k>0$ коробок количество удачных ходов равно s, а для оставшихся $m = 2019-k > 0$ коробок количество удачных ходов равно $s-1$. Так как количество камней в каждой коробке после N ходов должно быть не менее $100s$, для каждой из оставшихся m коробок было сделано не менее $100s - 100(s-1) = 100$ неудачных ходов. Поэтому общее количество ходов

$$N \geq (s-1)+100 = s+99. \qquad (1)$$

С другой стороны, подсчитаем двумя способами камни, разложенные во все коробки на удачных ходах: $100N = ks + m(s-1)$, откуда

$$100N < (k+m)s = 2019s. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $100(s+99) < 2019s$, откуда $1919s > 9900$ и $s > 5$. Окончательно, из (1) следует, что $N \geq s+99 \geq 6+99 = 105$.

Задача решена.

Отметим, что, варьируя числовые значения параметров из условия задачи, мы получаем целый класс интересных вопросов. При этом при различных соотношениях между параметрами могут сыграть роль разные эффекты.

П.Кожевников

М2585*. *Даны n действительных чисел. Известно, что сумма их k-х степеней равна 0 при всех нечетных натуральных k, не превосходящих n. Докажите, что сумма их k-х степеней равна 0 при всех нечетных натуральных k.*

Пусть $f(x) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \ldots$ $\ldots + (-1)^n s_n$ – многочлен, корни которого – данные n чисел $a_1, \ldots, a_n$, т.е. $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Тогда коэффициенты этого многочлена выражаются (по формулам Виета) через элементарные симметрические функции от его корней:

$$\begin{cases} s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n, \\ \vdots \\ s_n = a_1a_2\ldots a_n. \end{cases}$$

Здесь для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ число s_i равно сумме всех произведений чисел из набора $a_1, \ldots, a_n$, взятых в количестве i. Положим также $s_0 = 1$ и $s_k = 0$ при $k = n+1$, $n+2$, … Введем также суммы степеней: $p_k = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$. По условию задачи для всех положительных нечетных $k \leq n$ выполнено $p_k = 0$.

Воспользуемся последовательно так называемыми *тождествами Ньютона*, которые связывают s_i и p_j:

$$\begin{cases} s_1 = s_0p_1, \\ 2s_2 = s_1p_1 - s_0p_2, \\ 3s_3 = s_2p_1 - s_1p_2 + s_0p_3, \\ 4s_4 = s_3p_1 - s_2p_2 + s_1p_3 - s_0p_4, \\ 5s_5 = s_4p_1 - s_3p_2 + s_2p_3 - s_1p_4 + s_0p_5, \\ \vdots \end{cases}$$

Общая формула: $ks_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} s_{k-i}p_i$, она верна для всех $k = 1, 2, \ldots$.

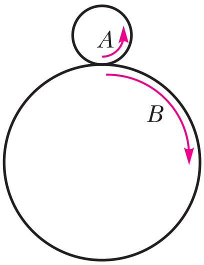
Последовательно применяя эти тождества для $k = 1, 3, 5$ и т.д. по всем нечетным, не превосходящим n, мы получаем, что все слагаемые в правой части равны 0, откуда s_k равно 0 при всех нечетных натуральных k, не превосходящих n.

После этого решение можно завершить двумя способами.

1) Продолжив пользоваться последовательно тождествами Ньютона для нечетных $k > n$, выводим, что $p_k = 0$ для таких k (с учетом $s_k = 0$ при $k > n$).
2) Полученные условия на s_k означают, что у многочлена f все коэффициенты при степенях одной четности (четности, противоположной четности n) равны 0. Тогда вместе с каждым корнем $t \neq 0$ многочлен f имеет корень $-t$, следовательно, f делится на $(x-t)(x+t) = x^2 - t^2$, т.е. $f(x) = \left(x^2 - t^2\right)h(x)$. При этом у многочлена h, являющего частным, все коэффициенты при степенях одной четности также равны 0. Продолжая рассуждения далее с многочленом h и т.д., мы в конце концов получаем, что все ненулевые корни многочлена f разбиваются на пары противоположных чисел. Отсюда уже очевидным образом вытекает утверждение задачи.

М.Дидин

Ф2589. *Две машины A и B одновременно начинают заезд по единому гоночному треку в точке касания кругов, как показано на рисунке. Обе машины движутся по траектории, которая представляет собой «восьмерку»: на верхней части восьмерки они движутся против часовой стрелки, а на нижней – по часовой стрелке. Длина окружности верхней части восьмерки 600 м, а нижней – 2000 м. Машина A движется с постоянной скоростью 10 м/с, а машина B – с постоянной скоростью 8 м/с.*



1) *Найдите время, спустя которое произойдет первая встреча. Ответ выразите в секундах и округлите до целого числа.*
2) *Какое расстояние проедет машина A к этому моменту? Ответ выразите в километрах и округлите до целого числа.*

Машина A в начальный момент времени отстает от машины B на $L = 600$ м (длина окружности верхней части восьмерки). Скорость, с которой это расстояние вдоль трека уменьшается, равна $v_A - v_B = 2$ м/с. Тогда время, спустя которое произойдет первая встреча, равно

$$t = \frac{L}{v_A - v_B} = \frac{600\text{ м}}{2\text{ м/с}} = 300\text{ с} = 5\text{ мин}.$$

Расстояние, которое проедет машина A к этому моменту, равно

$$s = v_A t = 3000\text{ м} = 3\text{ км}.$$

А.Бычков

Ф2590. *Две жидкости A и B смешали между собой так, что объем получившегося раствора оказался равным 1 л, а массовая доля жидкости B в смеси при этом была равна 34%. Суммарный объем раствора составил 94% от суммарного объема жидкостей A и B до смешивания. Плотность жидкости A равна 1000 кг/м³, плотность жидкости B равна 800 кг/м³.*
1) *Найдите отношение масс m_B/m_A. Ответ округлите до тысячных долей.*
2) *Найдите массу жидкости B. Ответ выразите в граммах и округлите до целого числа.*
3) *Найдите среднюю плотность смеси. Ответ выразите в кг/м³ и округлите до целого числа.*

Пусть m_A – масса жидкости A, а m_B – масса жидкости B. Тогда

$$\frac{m_B}{m_A + m_B} = 0{,}34, \text{ откуда } m_B = 0{,}52 m_A.$$

Так как объем раствора составил 94% от суммарного объема жидкостей до смешивания, то можно записать следующее уравнение:

$$0{,}94\left(\frac{m_A}{\rho_A} + \frac{m_B}{\rho_B}\right) = V,$$

где $V = 1$ л – объем получившегося раствора. Воспользовавшись соотношением между массами жидкостей A и B, получаем

$$0{,}94\left(\frac{m_A}{\rho_A} + \frac{0{,}52 m_A}{\rho_B}\right) = V, \text{ откуда}$$

$$m_A = 645\text{ г}.$$

Теперь можно найти массу жидкости B:

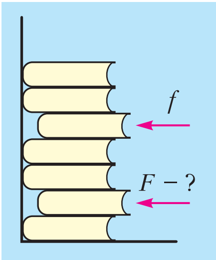
$$m_B = 0{,}52 m_A = 335\text{ г}$$

и среднюю плотность раствора:

$$\rho = \frac{m_A + m_B}{V} = 980\ \text{кг/м}^3.$$

А.Бычков

Ф2591. *На горизонтальной полке лежит стопка из семи одинаковых книг (см. рисунок). Третья сверху и вторая снизу немного выдвинуты из стопки, остальные книги прижаты корешками к вертикальной стенке. Наименьшая горизонтальная сила, необходимая для того, чтобы придвинуть к стенке третью сверху книгу, равна f = 25 Н. Какую наименьшую силу F нужно приложить для того, чтобы придвинуть к стенке вторую снизу книгу? Ответ выразите в ньютонах и округлите до целого числа.*



При вдвигании книг силы трения действуют на верхнюю и нижнюю поверхности вдвигаемых книг, т.е. надо рассмотреть две силы трения. Сила трения равна произведению коэффициента трения μ на силу нормального давления. Сила нормального давления равна суммарному весу книг над поверхностью, где возникает трение. Введенные в условии силы f и F равны, соответственно,

$$f = 2\mu mg + 3\mu mg,\ F = 5\mu mg + 6\mu mg.$$

Отсюда находим

$$F = \frac{11}{5} f = 55\ \text{Н}.$$

И.Воробьев

Ф2592. *На поверхности воды, температура которой 0 °С, плавает ледяной шарик, внутри которого находится вмерзшая в лед медная монета. Масса льда вместе с монетой m = 30 г. Этот композитный шарик перемещают в теплоизолированный сосуд с водой, объем которой V = 200 мл, а температура 5 °С. Теплоемкостью стенок сосуда можно пренебречь. После установления теплового равновесия шарик оказался целиком под водой и «висит» в воде, не опускаясь на дно. Плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3, плотность льда $\rho_2 = 0{,}9$ г/см^3, плотность меди $\rho_3 = 9{,}0$ г/см^3, удельная теплоемкость воды $c_1 = 4200$ Дж/(кг · °С), удельная теплоемкость меди $c_3 = 390$ Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Чему равна масса монеты, когда она не покрыта льдом? Ответ выразите в граммах и округлите до десятых долей.*

Поскольку композитный шарик, помещенный в воду с начальной температурой t = 5 °С, не опускается на дно, а «зависает» в воде, можно сделать вывод, что ледяная корка монеты растаяла не полностью, следовательно, установившаяся температура в сосуде равна 0 °С. Пусть растаяла масса Δm льда. Запишем уравнение теплового баланса: количество теплоты, которое получила монета со льдом, равно количеству теплоты, которое отдала вода, остыв до 0 °С, т.е.

$$\lambda \Delta m = c_1 V \rho_1 t.$$

Отсюда найдем

$$\Delta m = \frac{c_1 V \rho_1 t}{\lambda}.$$

То, что композитный шарик после частичного таяния ледяной корки «завис» в воде, означает, что средняя плотность такого шарика стала равна плотности воды. Тогда объем шарика в таком состоянии можно записать, с одной стороны, как $V = \frac{m - \Delta m}{\rho_1}$, а с другой стороны, как $V = \frac{M}{\rho_3} + \frac{m - M - \Delta m}{\rho_2}$, где M – искомая масса чистой монеты.

Таким образом,

$$\frac{m - \Delta m}{\rho_1} = \frac{M}{\rho_3} + \frac{m - M - \Delta m}{\rho_2}.$$

Для удобства введем переменную $\rho = \rho_1$. Тогда $\rho_2 = 0{,}9\rho$, а $\rho_3 = 9\rho$. С учетом этого придем к окончательному ответу

$$M = \frac{m - \Delta m}{9} = 1{,}9\ \text{г}.$$

А.Бычков

Задачи

1. Выберите три различные цифры так, чтобы среди трехзначных чисел, которые из них можно составить, оказались числа, делящиеся на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10.

О.Подлипский

2. В зале находятся лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый указал на одного из присутствующих и сказал: «Он – лжец».

Оказалось, что про каждого из находящихся в зале кто-то такую фразу сказал. Могло ли в зале быть ровно 101 человек?

О.Подлипский

3. По кольцевой трассе одновременно из одной точки в одном направлении стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 5 минут, второй – за 7 минут, третий – за 9 минут. Через какое наименьшее время все велосипедисты вновь окажутся в одной точке трассы? Скорости всех велосипедистов постоянны.

Н.Агаханов

4. Рассмотрим 8 плоскостей, каждая из которых проходит ровно через 3 вершины куба. Разрежем куб по всем этим плоскостям. Какая фигура получится в центре?

Фольклор

Иллюстрации Д.Гришуковой

Задача 1 предлагалась на школьном, а задачи 2 и 3 – на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

25. Три разбойника украли пять алмазов (возможно, разного веса) и решили разделить их между собой поровну по весу, не распиливая на куски. Они отмерили треть, но остальные алмазы нельзя было разделить на две равные части. Докажите, что разбойникам не удастся поделить алмазы, даже если они смогут отмерить треть по-другому.

С.Дориченко

26. На сторонах треугольника внутрь него строятся как на основаниях равнобедренные треугольники с углом α при вершине. При каком наибольшем α треугольник гарантированно окажется покрытым?

П.Кожевников

27. В гирлянде n лампочек и n кнопок с номерами. По инструкции, 1-ю кнопку надо соединить с одной лампочкой, 2-ю – с двумя, 3-ю – с тремя и т. д., но с какими именно лампочками соединяется каждая кнопка, решает пользователь. Сначала все лампочки погашены. Нажатие на любую кнопку меняет состояние всех соединенных с ней лампочек на противоположное (горящие лампочки гаснут, не горящие – зажигаются). Для каждой гирлянды будем считать, сколько различных комбинаций горящих и не горящих лампочек можно получить, нажимая произвольным образом на кнопки сколько угодно раз. Какое а) наибольшее, б) наименьшее количество таких комбинаций лампочек может давать гирлянда с n лампочками?

И.Акулич

28. Дан прямоугольник $a \times b$, где $b < a < 2b$. Покажите, как разрезать его на 4 многоугольника, из которых можно сложить равнобедренный прямоугольный треугольник.

В.Расторгуев

Течение воды. История, которой 250 лет

А.ЧЕРКУН

Вода – удивительная жидкость. Это важнейшая субстанция живых организмов. Ее прихотливое течение можно долго наблюдать с неослабевающим интересом. Даже простая картина истечения воды через отверстие в сосуде, которую мы не раз видели, таит в себе много неожиданных логических сюрпризов.

В 1974 году в задании Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) мне запомнилась экспериментальная задача. Требовалось в домашних условиях измерить реактивную силу струи воды, вытекающей из бокового отверстия сосуда, и построить график зависимости этой силы от высоты уровня воды над отверстием. Один из вариантов схемы измерения показан на рисунке 1, где сосуд для уменьшения трения располагается на катках или шарах, а реактивная сила

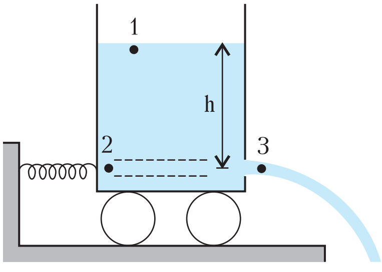


Рис. 1

измеряется по величине сжатия пружины. Задача интересна тем, что в ней несколько физических понятий соединяются в одно нетривиальное целое, доступное как для теоретического рассмотрения, так и для опытной проверки. Вопросы, которые тогда возникли, прояснились для меня лишь совсем недавно!

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200303

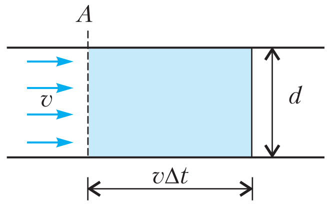


Рис. 2

Вычислим реактивную силу. На рисунке 2 изображен малый горизонтальный участок вытекающей струи. За время Δt через сечение A пройдет масса $m = \rho s v \Delta t$, где v – скорость потока, $s = \pi d^2/4$ – площадь сечения, d – диаметр, ρ – плотность воды. Эта масса уносит импульс $p = mv = \rho s v^2 \Delta t$, который равен импульсу силы, оказываемой сжатой пружиной за то же самое время, т.е. $F\Delta t = p$ (других сил, действующих на систему в горизонтальном направлении, нет). Отсюда находим величину реактивной силы струи:

$$F_{\text{р}} = F = \rho v^2 s.$$

Скорость v можно определить по закону Бернулли (1738 г.), который утверждает, что вдоль линии тока остается постоянной величина

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = C.$$

Здесь C – постоянная, p – давление, g – ускорение свободного падения. В точке 1 (см. рис.1), которая находится на высоте h, скорость $v = 0$, давление $p = p_{\text{а}}$, где $p_{\text{а}}$ – атмосферное давление. Значит,

$$C = \rho g h + p_{\text{а}} = p_h + p_{\text{а}},$$

где $p_h = \rho g h$ – гидростатическое давление. В точке 2 $v = 0$, $h = 0$, следовательно, $p_2 = C = p_h + p_{\text{а}}$. В точке 3 $p = p_{\text{а}}$, $h = 0$, поэтому $\rho v_0^2/2 + p_{\text{а}} = C = p_h + p_{\text{а}}$. Тогда для скорости струи v_0 и для реактивной силы $F_{\text{р}}$ получаем

$$v_0 = \sqrt{2gh} \text{ и } F_{\text{р}} = 2p_h s.$$

Да, получен правильный результат, за 250 лет, очевидно, несколько раз проверенный экспериментально. Но можно задать вопрос: а почему реактивная сила в 2 раза больше, чем сила гидростатического давления на площадь s? Казалось бы, в районе точки 2 на стенку сосуда действует разность сил внутреннего давления p_2 и наружного атмосферного давления p_a, равная гидростатическому давлению $p_h = \rho gh$, а напротив находится отверстие, где стенки вообще нет. Можно было бы предположить, что на любой высоте силы давления на левую стенку сосуда и на правую стенку сосуда равны друг другу и противоположны по направлению, поэтому они везде компенсируют друг друга, кроме области отверстия справа и области точки 2 слева. В этих двух областях некомпенсированная сила будет равна $F_S = p_h S$, где S – площадь отверстия. Получается, что в суммарной (векторной) силе давления, действующей на боковые стенки, отсутствует множитель 2, а в реактивной силе струи он есть, хотя ожидалось равенство $F_p = F_S$. Ведь можно сказать, что струя «реактивно» действует на воду в сосуде, вода давит на твердый сосуд, сосуд действует на пружину, и везде должно быть равенство сил, чтобы эти тела не двигались. Например, на сосуд одновременно давит вода и действует пружина. Сила пружины по величине равна реактивной силе струи, значит, суммарная сила давления воды на боковые стенки должна равняться реактивной силе струи, иначе сосуд стал бы двигаться.

Как найти равновесие? Первым шагом в решении этого вопроса стала догадка, что не везде равны давления на левую и правую стенки сосуда (на одной и той же горизонтальной линии вне области отверстия). Дело в том, что вода, подходя к отверстию, как показано стрелками на рисунке 3, движется рядом с правой стенкой с ненулевой скоростью v, которая тем больше, чем ближе отверстие. (На кромке отверстия она становится равной скорости струи v_0.) Тогда на какой-либо горизонтальной линии вблизи кромки отверстия, например на линии r_1, на левой стенке $p_{лев} + \rho g r_1 = C$ (здесь скорость пренебрежимо мала), а на правой $p_{прав} + \rho g r_1 + \rho v^2/2 = C$. Отсюда $p_{лев} - p_{прав} = \rho v^2/2$, т.е. здесь давление на левую стенку больше, чем на правую.

Оценим дополнительную некомпенсированную силу F_+, связанную с этой разностью давлений. Для этого надо знать, как зависит пристеночная скорость v от расстояния r до оси отверстия. Воспользуемся грубой моделью, представленной на рисунке 3. Там символом Φ_0 обозначена полусфера радиусом r_0. Если бы скорость течения везде на этой полусфере равнялась скорости струи v_0 и была направлена перпендикулярно полусфере, т.е. по линиям ее радиусов, то вся картина течения внутри сосуда стала бы однозначно определенной. Предположим, что мы теми или иными инженерными средствами обеспечили такую ситуацию на полусфере Φ_0, тогда скорость воды на полусферах Φ_1, Φ_2, Φ_3 тоже будет направлена по линиям радиусов и иметь постоянное для данной полусферы значение v. Так как через все полусферы проходит один и тот же поток воды, то выполняется равенство $2\pi r_0^2 \cdot v_0 = 2\pi r^2 \cdot v$, где $2\pi r^2$ – площадь поверхности полусферы. Значит, скорость обратно пропорциональна квадрату радиуса:

$$v = \frac{v_0 r_0^2}{r^2}.$$

Рассмотрим на правой стенке вокруг отверстия кольцо с меньшим и большим радиусами r и $r + \Delta r$ (рис.4). Если ширина коль-

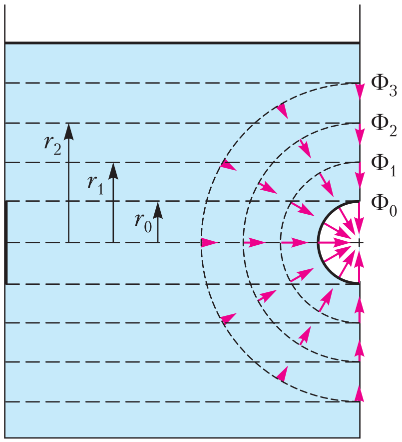


Рис. 3

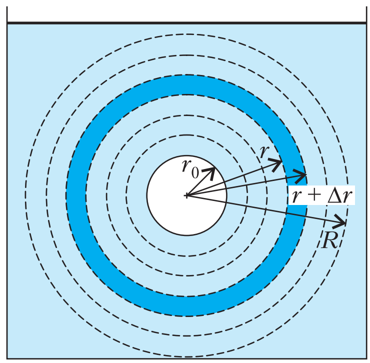


Рис. 4

ца Δr достаточно мала, то пристеночная скорость в пределах этой ширины почти одинаковая и дополнительная сила равна

$$\Delta F_+ = \Delta S\left(p_{\text{лев}} - p_{\text{прав}}\right) \approx$$
$$\approx \frac{2\pi r \Delta r \cdot \rho v^2}{2} = \frac{\Delta r \cdot \pi\rho v_0^2 r_0^4}{r^3},$$

где $\Delta S \approx 2\pi r \cdot \Delta r$. Разобьем правую стенку вокруг отверстия на систему узких колец и просуммируем соответствующие им дополнительные силы ΔF_+:

$$F_+ = \int_{r_0}^{R} dF_+ = \int_{r_0}^{R} \frac{\pi\rho v_0^2 r_0^4}{r^3}\,dr,$$

где суммирование ведется от радиуса r_0 отверстия до достаточно большого радиуса кольца R, когда кольцо еще не касается дна сосуда или поверхности воды. Известен и точный результат этого суммирования:

$$F_+ = \frac{1}{2}\pi\rho v_0^2 r_0^4\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2}\right).$$

Если радиус отверстия r_0 достаточно мал по сравнению с глубиной h и расстоянием до дна сосуда, то величиной $1/R^2$ можно пренебречь в сравнении с величиной $1/r_0^2$, и тогда получается замечательный результат:

$$F_+ = \pi r_0^2 \frac{\rho v_0^2}{2} = p_h S.$$

Теперь с учетом дополнительной силы F_+ в выражении для суммарной силы давления

$$F_S + F_+ = 2p_h S$$

появился искомый коэффициент 2.

Казалось бы, равновесие найдено, но в реальности есть важный параметр, который наша модель плохо отражает. При истечении воды через малое (по сравнению с h) отверстие скорость не может превысить $v_0 = \sqrt{2gh}$, тогда поток воды через это отверстие не может превысить Sv_0, а в модели поток равен $2Sv_0$, так как площадь полусферы Φ_0 в два раза больше площади отверстия S. Поэтому в реальности сила F_+ окажется значительно меньше $p_h S$.

При дальнейшем поиске равновесия возникает эвристическая догадка, что силу F_+ можно вообще обратить в ноль! Для этого надо удалить вход отверстия подальше от правой стенки, вставив внутрь перпендикулярно стенке трубочку длиной заметно большей, чем ее диаметр (рис.5). Тогда вдоль

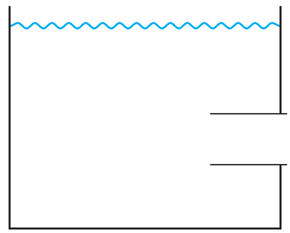


Рис. 5

правой стенки пристеночная скорость v будет пренебрежимо мала, а силы бокового давления воды на трубочку не будут оказывать влияние в горизонтальном направлении измерения реактивной силы.

Поскольку добавочная сила устранилась, приходится вернуться обратно к равенству $F_\text{р} = F_S$. Это равенство точно расшифровывается так: $2p_h s = p_h S$, откуда следует непредвиденный сюрприз: $2s = S$, т.е. площадь сечения струи в два раза меньше площади отверстия! Оказывается, что диаметры струи и отверстия – это не тождественные, а принципиально разные понятия. Сегодня мне этот факт известен, поэтому для площади струи и площади отверстия сразу были выбраны различные буквы, s и S, но это было удивительное открытие, и его эмоционального заряда хватило, чтобы поставить реальный эксперимент. На фотографии, представленной на рисунке 6, струя воды имеет диаметр примерно в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем у трубочки: $20{,}0/14{,}3 \approx 1{,}40$. Далее выяснилось, что еще 250 лет назад это открытие сделал французский математик, физик, инженер и морской офицер Жан-Шарль шевалье де Борда, поэтому конструкция трубочки (см. рис.5) названа «насадок Борда».

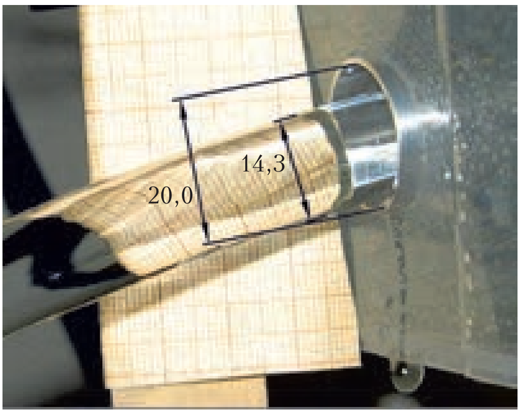


Рис. 6

Теперь можно вернуться к ситуации обыкновенного отверстия. Если s и S разные, то ответ на начальный вопрос о конструктивном смысле коэффициента 2 найден – действительно реактивная сила равна суммарной силе давления воды на боковые стенки:

$$F_{\text{р}} = F_S + F_+, \text{ т.е. } 2p_h s = p_h S + F_+.$$

И этот ответ состоит из целых трех составляющих: 1) некомпенсированная сила $p_h S$ на противоположной от отверстия стенке; 2) дополнительная сила F_+, связанная с пристеночным течением вокруг отверстия; 3) сужение струи, $S > s > S/2$.

Простой формулы, по которой можно определить либо s, либо F_+, нет. Для их расчета надо написать детальные уравнения гидродинамики и применить технику вычислительной математики. Это другая интересная и сложная задача. Простое применение закона Бернулли в эксперименте дает лишь предсказание скорости струи $v_0 = \sqrt{2gh}$, а для прогноза реактивной силы надо еще какимлибо образом узнать диаметр струи, к примеру измерить по фотографии или по расходу воды в секунду. В литературе, например [1, с. 245], указывается, что на опыте для разных высот h при очевидных оговорках наблюдается постоянное соотношение $s/S \approx \approx 0{,}62$. Следовательно, $F_+ = 2p_h s - p_h S \approx \approx 0{,}24 p_h S$, и это в 4 раза меньше, чем по нашей грубой модели. Таким образом, дополнительная сила F_+ становится экспериментально определенной величиной.

Какие физические моменты в процессе сужения потока можно себе представить? На рисунке 7 показаны линии тока воды. На самой крайней линии, обозначенной цифрой 1, применение закона Бернулли дает

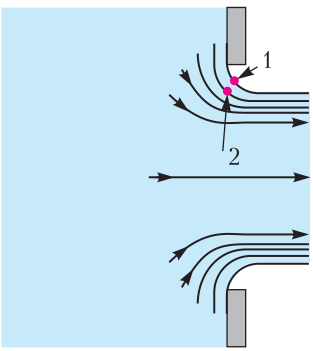


Рис. 7

«всюду» постоянную скорость $v_0 = \sqrt{2gh}$. Эта линия является продолжением пристеночного течения, которое отвечало за появление дополнительной силы F_+, поэтому крайняя линия разворачивается на 90°, меняя вертикальное направление на горизонтальное. Криволинейное движение с постоянной скоростью происходит с центростремительным ускорением, которое должно вызываться соответствующей силой, поэтому на соседней линии тока под номером 2 в точке 2 должно быть большее давление, чем в точке 1, следовательно, в точке 2 скорость меньше (!), чем v_0. По мере удаления от отверстия скорость и давление на линии 2 постепенно приближаются к постоянной скорости и атмосферному давлению $p_{\text{а}}$ на линии 1.

Оценим теперь влияние вязкости жидкости. Рассмотрим пластину, которая поддерживается на постоянном расстоянии L от неподвижной стенки и тянется с постоянной скоростью v (рис.8). В зазоре между пласти-

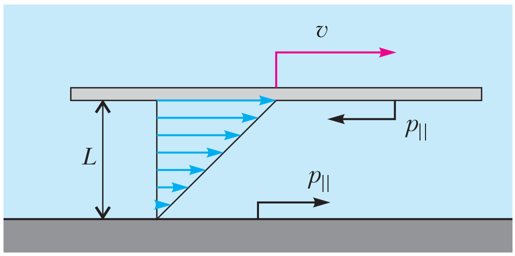


Рис. 8

ной и стенкой возникает послойное движение жидкости такое, что жидкость «прилипает» к стенке и имеет нулевую скорость рядом со стенкой, но чем дальше от стенки, тем скорость становится больше и больше, пока не сравняется со скоростью пластины, т.е. пока жидкость не «прилипнет» к пластине. При этом на поверхности стенки и пластины будут действовать удельные вязкие силы $p_{||}$, направленные параллельно поверхностям. Удельная сила имеет размерность давления и равна $p_{||} = \eta v/L$, где η – коэффициент динамической вязкости жидкости. Для воды при комнатной температуре $\eta \approx 0{,}001$ Па · с. Для грубой оценки влияния вязкости обычно вместо L берется характерный размер потока, например радиус отверстия r_0, и полученное таким образом вязкое давление $p_{||}$ сравнивают с каким-либо характерным давлением, например со скоростным напором $p_v = \rho v^2/2$. Безразмерное отношение $2p_v/p_{\|} = \rho v L/\eta$ называется числом Рейнольдса и обозначается Re. Для нашего реального эксперимента, в котором $r_0 = 1$ см, $h = 20$ см, $g = 9{,}81$ м/с^2, $\rho = 1000$ кг/м^3, $v_0 = \sqrt{2gh} \approx 2$ м/с, число Рейнольдса Re $\approx$ 20000. Значит, характерное вязкое трение здесь меньше характерного динамического давления во многие тысячи раз, поэтому можно полагать, что описание линий тока (см. рис.7) близко к реальности. Правда в реальности возникает сложная структурная картина, связанная с вязким «прилипанием» потока к стенке, но характерная толщина и другие размеры этой структуры относительно малы.

Неожиданно обнаружилось, что в нескольких современных учебниках приводится отличная от рисунка 7 картина. Так, на рисунке 9, взятом из книги [2, с. 88] (подобный

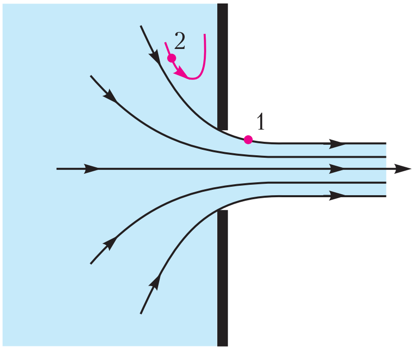


Рис. 9

рисунок есть также в книге [3, с. 496]), крайняя линия тока, обозначенная 1, не касается вертикальной стенки. Тогда возникает вопрос: что происходит в точке 2 чуть выше линии тока 1? Если в точке 2 скорость ненулевая, то соответствующая линия тока не выйдет через отверстие, так как крайняя линия 1 уже есть. Значит, эта линия должна развернуться и замкнуться в кольцевой поток. Если же в точке 2 скорость равна нулю, то это означает резкий скачок скорости непосредственно рядом и вдоль всей линии 1. Оба случая представляются маловероятными (хотя гидродинамика богата сюрпризами).

Еще более рельефно выступает вопрос о картине течения при заходе в насадок Борда. На рисунке 10 выше и ниже средней линии даны два возможных варианта течения. Пер-

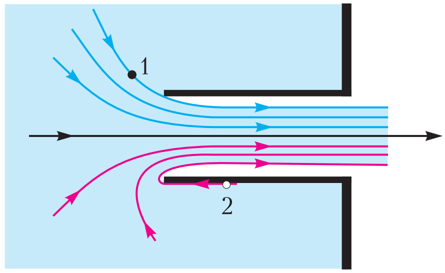


Рис. 10

вый соответствует рисунку из книги [2, с. 88] (и похожий есть в книге [1, с. 245]), а второй составлен так, чтобы учесть пристеночное течение, обозначенное крайней линией 2. Здесь эта линия совершает разворот на 180°, т.е. меняет направление на противоположное. (Тогда как крайняя линия 1 поворачивает лишь на 63°.)

Для выяснения реальной картины был проведен соответствующий опыт. В стенку прямоугольной 15-литровой емкости было встроено качественное стеклянное окно диаметром 8 см прямо напротив входа воды в насадок Борда. Через это окно цифровым фотоаппаратом с лампой-вспышкой получено фото, приведенное на рисунке 11. На

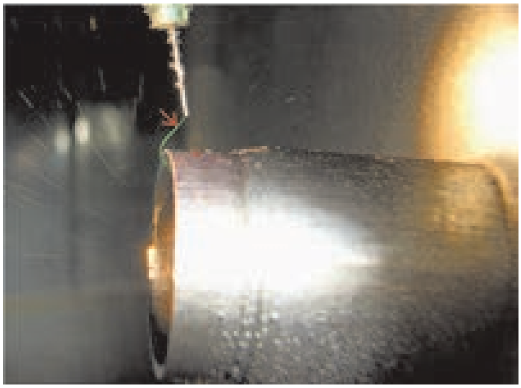


Рис. 11

фото в насадок Борда *1* втекает поток. Внутренний диаметр трубочки 20 мм, а внешний диаметр рядом со входом 20,3 мм. Из медицинской иголки *2* вытекают чернила, и их тонкая зеленая траектория, обозначенная стрелкой, показывает линию тока, которая разворачивается приблизительно на 135°, что больше соответствует варианту ниже средней линии на рисунке 10.

Неожиданно лампа-вспышка и случайные пузырьки воздуха помогли увидеть дополнительные детали. Маленькие пузырьки захватываются мощным течением и движутся почти по линиям тока. За время, что длится вспышка, каждый пузырек, попавший в фокус фотоаппарата, оставляет на фотографии протяженный след, указывая линию тока. Этот след тем длиннее, чем больше скорость потока, т.е. дополнительно получается информация о скорости. Цифрой *3* на рисунке 11 отмечена группа коротких черточек-следов, которые также указывают на наличие течения с внешней стороны насадка Борда навстречу центральному потоку. Образно говоря, этот внешний поток «сталкивается» с центральным потоком.

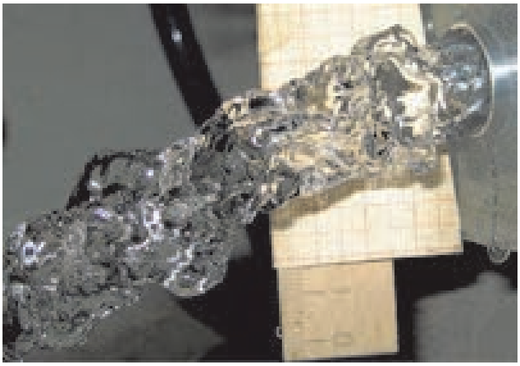


Рис. 12

Еще один яркий сюрприз зафиксирован на фотографии, представленной на рисунке 12. Оказывается, при одной и той же глубине h в одной и той же трубке Борда бывают два совершенно разных устойчивых режима течения: ламинарный, как на рисунке 6, и турбулентный, как на рисунке 12! Какой режим возникнет, зависит от стартовых условий. Если резиновую пробку (с небольшой боковой конусностью) на старте вынимать из трубки с наружной стороны, то возникает турбулентный режим, а если с внутренней стороны в толще воды, то возникает ламинарный режим. Чтобы в последнем случае не возмущать воду рукой, резиновая пробка крепится к длинному (вертикальному) стержню посредством прямой гибкоупругой проволоки, пронизывающей пробку вдоль центральной оси. Если просто смотреть на турбулентный поток, то он белый, шумный, беспокойный, брызгающий, но лампа-вспышка «остановила» этот внешний хаос, и открылась хрустальная прозрачность, плавность и какая-то внутренняя неуловимая сущность. Теперь поток касается стенок трубки, и расход воды увеличивается (!) по сравнению с ламинарным режимом.

Математическое моделирование турбулентности до сих пор остается интеллектуальным вызовом. Простые домашние эксперименты, наподобие тех, что представлены в статье, могут дать не только ответ на сотни собственных вопросов, но и послужить основой какой-либо новой концепции турбулентности. И вообще, гидро- или аэродинамику стоит воспринимать как интереснейшую область для творческого осмысления.

Снова вернемся к опытам с насадком Борда. Если взять не круглую трубку, а трубку (из жести) с прямоугольным 1:3 сечением, то соотношение $2s = S$ сохраняется. А как будет выглядеть струя? Удастся ли вообще получить ламинарный режим? Или если случайные пузырьки воздуха оказались столь эффективны для визуализации картины течения, то, может быть, стоит пузырьки создавать искусственно? Например, можно по одной медицинской иголке подавать раствор соды $NaHCO_3$, а по соседней иголке – раствор лимонной кислоты, тогда в смеси двух потоков должны образовываться пузырьки углекислого газа CO_2.

Сотни вопросов и сотни вариантов ответов… Твори, выдумывай, пробуй!

Литература

1. *Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс*. Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 7. – М.: Мир, 1966.

2. *Т.Е.Фабер*. Гидроаэродинамика. – М.: Постмаркет, 2001.

3. *Д.В.Сивухин*. Общий курс физики. Том 1. – М.: Физматлит, 2016.

Все есть число.

Пифагор

Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук.

Леонардо да Винчи

...многие из открытых математиками плодотворных методов исследования могут быть значительно лучше выражены с помощью идей, вытекающих из работы Фарадея, чем в их оригинальной форме.

Джеймс Клерк Максвелл

Математика – это язык.

Джозайя Уиллард Гиббс

Непостижима эффективность математики в естественных науках.

Юджин Вигнер

Наш опыт ... позволяет предположить, что природа является выражением простейшей математической идеи. ...Но началом каждой физической теории являются мысли и идеи, а не формулы.

Альберт Эйнштейн

...теоретическая физика пользуется приемами и методами математики. Однако от последней она резко отличается непосредственной связью с результатами эксперимента.

Лев Ландау

...невозможна физика без математики, а пожалуй – и математика без физики: ведь вряд ли имеет смысл создавать язык, которым мы не имеем в виду пользоваться.

Исаак Яглом

А так ли хорошо знаком вам союз физики и математики?

Был этот союз, как видно даже из эпиграфов, отнюдь не всегда безоблачным. Тем не менее, за многие столетия активного взаимодействия наук он смог настолько укрепиться, что стал необычайно плодотворным. Последние полвека «Квант» интенсивно этому способствовал, а теперь и наша рубрика попробует внести свою скромную лепту.

К сожалению, математика и физика в школе порой располагаются, что называется, «по разные стороны баррикад», когда ученики не подозревают, насколько такое содружество поможет им обогатить свои знания и умения. В этом, однако, легко убедиться, участвуя в разнообразных турнирах и олимпиадах. Малую толику сходных задач мы и предлагаем сегодня, не проводя, правда, предметную границу. Полагаем, что вы сами выберите, на что опереться при их решении – на физическую интуицию, на математическую смекалку или просто на шутку. И круг подобных заданий «Калейдоскоп» намерен вскоре расширить.

Вопросы и задачи

1. На праздновании юбилея журнала «Квант» директор физико-математического лицея предложил 24 выпускникам построиться в 6 рядов так, чтобы каждый ряд состоял из 5 человек. Как справились с этим заданием лицеисты?

2. На поверхности сферы наугад выбраны три точки. Чему равна вероятность того, что все они окажутся в одном полушарии?

3. Из Москвы стартовал вертолет, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. На какой широте и долготе он окажется по отношению к старту?

4. Два велосипедиста одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились через 15 минут после того как первый велосипедист доехал до середины пути. Когда же после их встречи прошло 30 минут, до середины пути доехал второй велосипедист. Сколько времени занял весь путь у первого велосипедиста?

5. Два пешехода стартовали одновременно по круговой дороге с одного места в одном направлении. Пешеход, идущий быстрее, нагнал другого через 36 минут. Если бы они стартовали в противоположных направлениях, то встретились бы через 4 минуты. За сколько минут каждый из пешеходов может обойти круговую дорогу?

6. Двое часов начали и закончили бить одновременно. Первые бьют через каждые 2 секунды, вторые – через каждые 3 секунды. Всего было насчитано 13 ударов, при этом совпадающие удары воспринимались как один. Сколько времени били часы?

7. В поход пошли 56 математиков и в целое число раз меньше физиков. Они разместились в нескольких палатках, в каждой – столько человек, сколько палаток. Сколько было физиков?

8. Число яиц в корзине удваивается каждые 5 минут. Через час корзина наполнилась. За сколько времени она наполняется наполовину?

9. Десять машин выпускают одинаковые детали массой по 10 г каждая. Одна из машин испортилась и стала выпускать детали массой по 5 г. Как найти испортившуюся машину с помощью одного взвешивания деталей?

10. Можно ли поставить на край круглого стола кастрюлю так, чтобы она только на 1/3 площади своего дна соприкасалась с поверхностью стола?

11. По данным опроса, проведенного в классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, проявляют интерес еще и к физике, а 25% учеников, интересующихся физикой, проявляют интерес и к математике. И только два ученика равнодушны к обоим этим предметам. Сколько человек в классе, если их больше 20, но меньше 30?

Микроопыт

Представьте, что вы оказались в равнинном лесу площадью 100 $км^2$ с выпуклой границей. Можно ли из него выбраться, пройдя путь, не превышающий 30 км?

Любопытно, что...

...уже на самом раннем этапе своего формирования математика интересовала человека как геометрия и как алгебра, о чем позволяют судить наскальные рисунки и орнаменты кроманьонцев, а также числовые амулеты, отражающие связь с семидневной лунной неделей.

...уровень развития математики в Вавилоне и Древнем Египте обеспечивал замечательные достижения землемеров, астрономов и строителей – достаточно вспомнить хотя бы знаменитые пирамиды!

...математическая наука в современном ее понимании была заложена в период от 6 до 4 веков до новой эры в Древней Греции, причем уровень строгости и глубины понимания были там и тогда таковы, что вновь оказались достигнуты лишь в европейской науке XIX столетия.

...в школе Пифагора на первом месте были *теоретические* рассуждения о математических моделях природных явлений – эксперименты и наблюдения считались делом второстепенным. Зенон полагал, что математика способна решить все проблемы физики. Архимед же превосходно понимал, что математика не может развиваться в отрыве от практических потребностей людей.

...Фарадей не написал ни одной формулы сложнее пропорции, тем не менее ему мы обязаны созданием одного из основных понятий физики – понятия поля; он ввел и образное представление поля – картину силовых линий.

...основатель и руководитель петербургской математической школы П.Л.Чебышёв в середине XIX века впервые внедрил в теорию механизмов математические методы, указав на аналитическое направление в решении задач этой теории.

...в начале XX века известный физик, астроном и математик Джеймс Джинс активно протестовал против включения в университетскую программу подготовки физиков теорию групп, считая, что она «наверняка ни одному физику никогда не понадобится». Однако вскоре теория групп стала чуть ли не первой из областей математики, используемой в квантовой физике.

Что читать в «Кванте» о союзе физики и математики

(публикации последних лет)

1. «Пределы точности “точных” наук» – 2016, Приложение №4, с.219;

2. «Для чего мы изучаем математику?» – 2017, №7, с.4; №8, с.2;

3. «Численные значения: зачем и почему они нужны» – 2019, №4, с.2;

4. «Вычисления без вычислений» – 2020, №1, с.21;

5. «Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения» – 2020, №1, с.29.

Материал подготовил А.Леонович

Прыжки в правильном многоугольнике

Е.БАКАЕВ

В этой статье мы рассмотрим несколько решений задачи, предлагавшейся в одном из недавних туров Конкурса имени А.П.Савина. А именно, задачи 20:

В каждой вершине правильного 4k-угольника сидело по блохе. Каждая блоха дружит с двумя своими соседями. Половина блох – красные, половина – синие, причем красные и синие блохи чередуются. Блохи начали прыгать. В первую секунду прыгнули красные: каждая прыгнула в точку, симметричную ей относительно прямой, соединяющей двух ее друзей. Во вторую секунду аналогичным образом прыгнули все синие блохи. В третью секунду снова прыгнули все красные и т.д. Докажите, что через k секунд все блохи снова окажутся в вершинах некоторого правильного 4k-угольника.

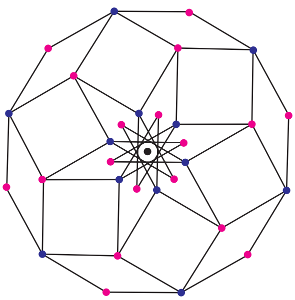


Рис. 1

На рисунке 1 приведен пример того, как красные блохи, сидящие в вершинах правильного 12-угольника, сделают три прыжка.

Первый способ

Пусть точка O – центр исходного многоугольника. Рассмотрим двух соседних блох в точках A и B. Они все время будут находиться на прямых OA и OB соответственно. Рассмотрим треугольник AOB и выясним, как движутся эти две блохи – очевидно, что другие пары соседних блох будут скакать по своим треугольникам аналогичным образом.

С каждым прыжком внутри угла AOB будет откладываться отрезок, равный AB. Выясним, какими будут углы возникающих равнобедренных треугольников. Пусть на i-м прыжке блоха прыгает в точку P_i, при этом образуется равнобедренный треугольник Δ_i с углами α_i при основании. Первые два треугольника изображены на рисунке 2. Из

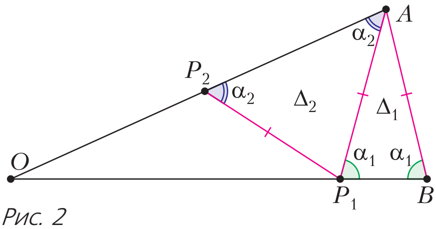


Рис. 2

того что треугольник AOB равнобедренный и $\angle AOB = \dfrac{360°}{4k} = \dfrac{90°}{k}$, несложно найти

$$\alpha_1 = 90° - \frac{45°}{k}, \quad \alpha_2 = 90° - 3\cdot\frac{45°}{k}.$$

Мы хотим получить явную формулу для α_i, т.е. выразить этот угол через i. Естественно делать это по индукции, но мы поступим немного иначе. Рассмотрев последовательные треугольники Δ_{i-1}, Δ_i, Δ_{i+1},

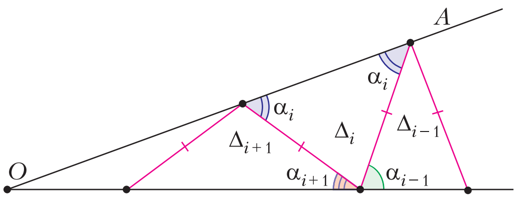


Рис. 3

можно заметить, что $2\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}$ (рис.3). Если преобразовать это равенство в $\alpha_i - \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} - \alpha_i$, то станет видно, что последовательность α_i является арифметической прогрессией. Зная ее начало, мы можем записать формулу общего члена:

$$\alpha_i = 90° - (2i-1)\cdot\frac{45°}{k}.$$

Подумаем теперь, где кончится эта последовательность треугольников. Очередной треугольник Δ_i удастся построить внутри

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200304

угла AOB, если угол $\alpha_i = 90° - (2i-1)\cdot\dfrac{45°}{k}$ не больше $\angle AOB = \dfrac{90°}{k}$, т.е. при $i \le k-1$.

Итак, треугольник Δ_k – это первый треугольник из рассматриваемой последовательности треугольников, который не поместится целиком внутри угла AOB (рис.4). Так

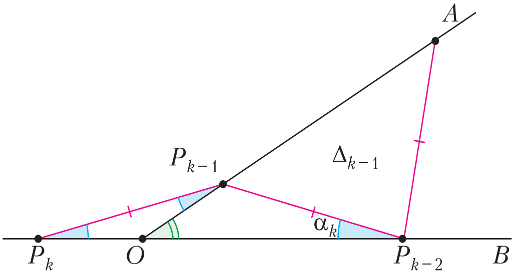


Рис. 4

как $\alpha_k = \dfrac{45°}{k} = \dfrac{\angle AOB}{2}$, то треугольник OP_kP_{k-1} равнобедренный и $OP_k = OP_{k-1}$.

Получается, что после k-го прыжка эти две блохи, а значит и все блохи, будут снова равноудалены от точки O. Пара блох, которые изначально сидели в противоположных вершинах $4k$-угольника, либо обе останутся на тех же лучах, исходящих из O, либо займут лучи друг друга. Поэтому снова все блохи будут сидеть в вершинах правильного $4k$-угольника. Задача решена.

Эта конструкция – прыжки фиксированной длины с одной стороны угла на другую – рассматривалась в задаче Н.Б.Васильева, вошедшей в «Задачник «Кванта» под номером М190:

На плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b. В точке A_1, находящейся на прямой a на расстоянии меньше 1 от прямой b, сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, …, руководствуясь следующими правилами. Во-первых, точки A_1, A_2, A_3, … лежат на прямой a, точки B_1, B_2, B_3, … – на прямой b. Во-вторых, $1 = A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = A_3B_3 = \ldots$ В-третьих, наконец, точка A_n не совпадает с A_{n+1}, кроме случая $A_nB_n \perp a$ (аналогично, B_n совпадает с B_{n+1}, только если $B_nA_{n+1} \perp b$). Нетрудно видеть, что этими тремя условиями последовательность прыжков определена однозначно. Докажите, что если угол между прямыми a и b измеряется рациональным числом градусов, то путь блохи будет периодическим, т.е. в некоторый момент она попадет в начальную точку A_1 и затем будет последовательно проходить те же самые точки B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, …, как в начале пути; а если угол измеряется иррациональным числом градусов, то блоха не попадет ни в какую точку более двух раз.

Видно, что в конкурсной задаче 20 рассматривается частный случай конструкции из задачи М190 – когда угол между прямыми равен $\dfrac{90°}{k}$ для натуральных k.

Второй способ

Соединим каждую блоху со следующей по часовой стрелке. Будем следить за тем, как этот набор из n векторов меняется при прыжках ($n = 4k$). Пусть на некотором шаге одна из блох прыгает из точки B в точку B', а ее

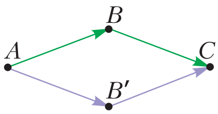


Рис. 5

друзья сидят в точках A и C (рис.5). Тогда $ABCB'$ – ромб, и в рассматриваемом наборе векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ заменятся на $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AB}$, т.е. поменяются местами.

Таким образом, при каждом прыжке все векторы разбиваются на пары соседних и два вектора каждой пары меняются местами. Раз происходят только перестановки начального набора векторов, то для краткости записи можно рассматривать перестановку их индексов. Например, при $k = 3$ последовательность перестановок будет такой, как в таблице (для наглядности четные и нечетные индексы покрашены в разные цвета):

Сначала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
после 1-го прыжка	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
после 2-го прыжка	11	4	1	6	3	8	5	10	7	12	9	2
после 3-го прыжка	4	11	6	1	8	3	10	5	12	7	2	9

Заметим, что каждый раз четные индексы сдвигаются на одну позицию относительно нечетных. При этом и четные и нечетные индексы не меняют своего внутреннего порядка. Поэтому через k прыжков получится такая последовательность:

$1\ (2+2k)\ 3\ (4+2k)\ 5\ (6+2k)\ \ldots$

Векторы $\overrightarrow{a_i}$ и $\overrightarrow{a_{i+2k}}$ являются противоположными, поскольку изначально они шли вдоль противоположных сторон правильного $4k$-угольника. Значит, последовательность векторов, которая получится через k прыжков, можно записать так: $\overrightarrow{a_1}$, $-\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, $-\overrightarrow{a_4}$, … …, $\overrightarrow{a_{n-1}}$, $-\overrightarrow{a_n}$. Покажем теперь, что если двигаться по таким векторам в этом порядке, то мы будем совершать обход вершин правильного n-угольника.

Угол между соседними векторами $\overrightarrow{a_i}$ и $\overrightarrow{a_{i+1}}$ – это внешний угол правильного $4k$-угольника, он равен $\frac{360°}{4k}$. Такой же угол образуют диагонали A_1A_{2k} и $A_{2k}A_{4k-1}$ правильного $4k$-угольника $A_1A_2\ldots A_{4k}$ (рис.6). Это показывает, что совершается обход вершин правильного $4k$-угольника по его «почти самым длинным» диагоналям длины, равной стороне исходного $4k$-угольника (рис.7).

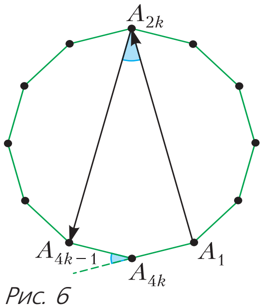


Рис. 6

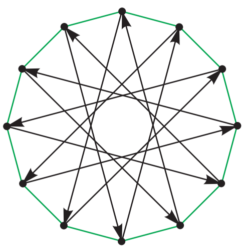


Рис. 7

Третий способ

Вернемся к ломаной с равными звеньями, вершины которой лежат на сторонах угла AOB – как в первом решении (рис.8). Рассмотрим два соседних звена $P_{k-1}P_k$ и P_kP_{k+1} – они образуют равнобедренный треугольник. Отразим $\angle AOB$ относительно той стороны, на которой лежит P_k; пусть точке P_{k+1} симметрична точка P'_{k+1}. Тогда точки O, P_{k-1}, P_k и P'_{k+1} лежат на одной окружности (это следует из того, что два противоположных угла в сумме дают 180°).

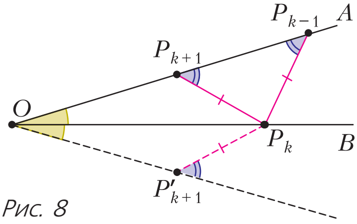


Рис. 8

Эта конструкция встречается часто. Для треугольников OP_kP_{k-1} и OP_kP_{k+1} выполняется так называемый четвертый признак «равенства» треугольников: «по двум сторонам и углу не между ними». Такие треугольники не обязательно равны (для этого вывода нужны дополнительные условия), но если они не равны, то, в частности, из них можно сложить вписанный четырехугольник.

Возможен также другой случай взаимного расположения точек: P_{k+1} может попасть не на луч OA, а на его дополнение (рис.9). Но и тогда те же четыре точки лежат на одной окружности.

Эти два случая охватывают все возможные

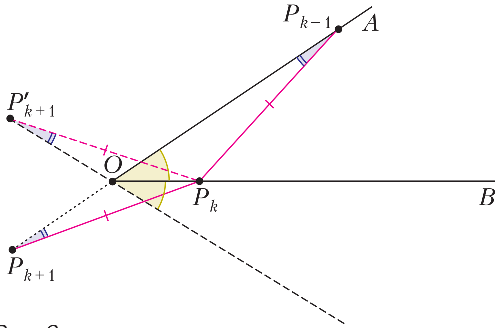


Рис. 9

варианты расположения точек, помимо вырожденных (т.е. когда некоторые из этих 4 точек совпадают), но для них факт продолжает оставаться верным.

Итак, мы разобрались, что происходит при таком отражении одного звена ломаной. Теперь повторим это действие много раз. Если так и дальше отражать углы, то получится пучок лучей с равными углами между соседними лучами. А ломаная «распрямится» в такую ломаную, у которой каждая следующая вершина лежит на следующем луче (рис.10). И раз любые три соседние

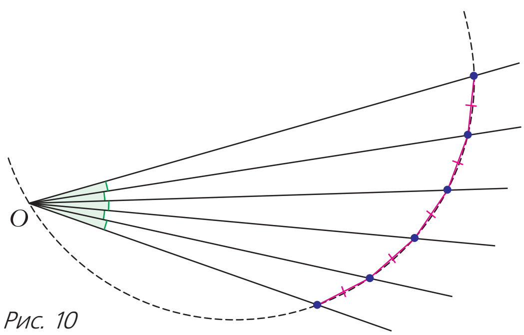


Рис. 10

точки лежат на одной окружности с точкой O, то и все они лежат на одной окружности.

Вернемся к исходной задаче о правильном многоугольнике. Первое звено ломаной – это его сторона AB. Тогда после «выпрямления» ломаной все точки будут лежать на окружности, описанной около AOB, где O – центр правильного многоугольника (на рисунке 11 показан пример для $k = 3$). Угол AOB

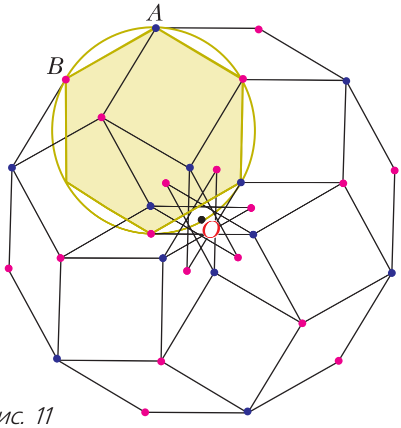


Рис. 11

является вписанным в эту окружность и центральным углом описанной окружности правильного $4k$-угольника, значит, градусные меры дуг AB этих двух окружностей отличаются в 2 раза. Отсюда следует, что в описанную около AOB окружность вписывается правильный $2k$-угольник со стороной AB. Значит, он и является ломаной, в которую «выпрямится» исходная! Отсюда ясно, что места, на которые блохи прыгнули после $(k-1)$-го прыжка и после k-го прыжка, будут равноудалены от точки O – ведь они, как и весь правильный $2k$-угольник, симметричны относительно серединного перпендикуляра к стороне AB. Задача решена.

Зададимся еще парой естественных вопросов, возникающих при размышлении над исходной задачей.

Мы выяснили, как будут расположены блохи через k прыжков. А как будут двигаться блохи после этого? Предлагаем подумать об этом самостоятельно.

Следующий вопрос такой. В задаче рассматривался $4k$-угольник. Понятно, почему требуется, чтобы количество вершин было четным – чтобы правило, по которому прыгают блохи, было корректным. А что будет,

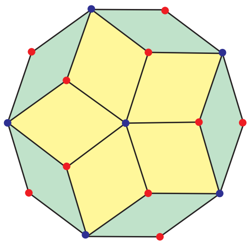


Рис. 12

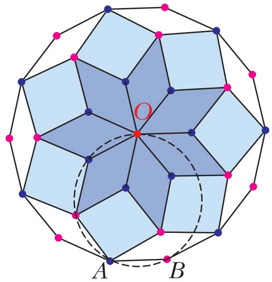


Рис. 13

если оно четное, но не делится на 4? Иными словами, что интересного можно заметить про аналогичную последовательность прыжков для $(4k+2)$-угольника? На рисунках 12 и 13 приведены иллюстрации для $k=2$ и $k=3$ (иллюстрацию для $k=1$ предлагаем представить в уме).

Видно, что возникает разбиение правильного многоугольника на ромбы. После k-го прыжка половина блох попадает в центр – не только в рассмотренных случаях, а для всех k, и это можно доказать, используя рассмотренные нами подходы.

Если рассмотреть последовательность равнобедренных треугольников, как в первом способе, то получится, что k таких треугольников целиком замощают треугольник AOB. Это, конечно, требует доказательства, но оно аналогично доказательству для $4k$-угольника (и даже несколько проще его), и мы не будем приводить его здесь.

Отметим, что получившаяся конструкция любопытна сама по себе. Например, для $k=2$ она позволяет найти значение косинуса $36°$ просто с помощью подобия треугольников ABC и AOB (рис.14):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+x}{1}, \\ 1+x = 2\cos 36°. \end{cases}$$

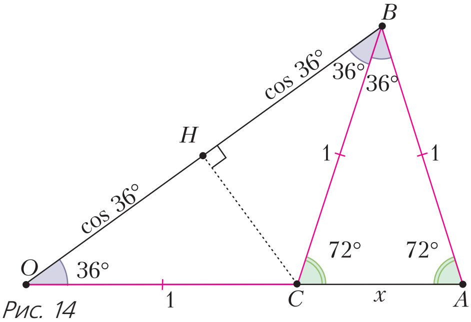


Рис. 14

Также эта конструкция скрыта, например, в такой задаче: требуется найти угол, отмеченный знаком вопроса на рисунке 15. Подумайте, какое значение k здесь лучше выбрать.

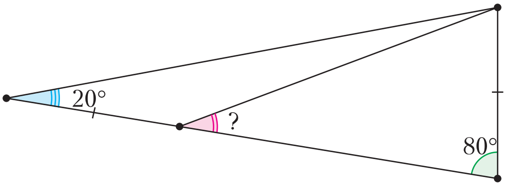


Рис. 15

Предлагаем самостоятельно подумать над тем, как применить к задаче про $(4k+2)$-угольник идеи второго способа.

Третий способ дает нам такое короткое объяснение: число $\frac{4k+2}{2} = 2k+1$ нечетно, и у правильного $(2k+1)$-угольника со стороной AB одна из вершин попадает в точку O (см.рис.13).

Этот же подход из третьего способа можно применить и к задаче М190. Пусть вместо того, чтобы прыгать по сторонам одного угла, блоха перепрыгивает на следующий луч этого пучка (см. рис.10). Тогда получается, что она скачет по окружности с равными интервалами. Когда величина угла между исходными прямыми (т.е. $\angle AOB$ в наших обозначениях) выражается рациональным числом градусов, то и длина прыжка блохи по окружности тоже выражается рациональным числом градусов, значит, в какой-то момент ее путь зациклится. В ином случае длина прыжка блохи по окружности составляет иррациональное число градусов и она все время будет попадать в новые точки, т.е. расстояние от блохи до точки O не может повториться три раза.

Статья Н.Б.Васильева «Последовательность прыжков» в «Кванте» №11 за 1973 год посвящена другому подходу к задаче М190. Рекомендуем прочитать эту статью.

НАМ ПИШУТ

Как выглядит график синуса?

П.ПАНОВ

Необычный график функции $y = \sin(314x)$ я обнаружил в одной из студенческих работ по электротехнике, откуда его и позаимствовал (рис.1). Конечно, так график синуса не может выглядеть ни в коем случае, и мы хотим разобраться в причинах этой аномалии, понять, в чем тут дело.

Прежде поясним, откуда в электротехнике берется функция $y = \sin(314x)$. На самом деле она, как чертик, выскакивает из каждой розетки. Всем известно, что в России частота сетевого напряжения составляет $f = 50$ Гц. После перехода к угловой частоте получаем $\omega = 2\pi f = 100\pi$ рад/с и после естественного округления имеем $\omega = 314$ рад/с. При этом зависимость напряжения от времени принимает вид $U(t) = 220\sin(314t)$ В. Отбросив постоянный множитель и заменив t на x, получим ту самую функцию $y = \sin(314x)$.

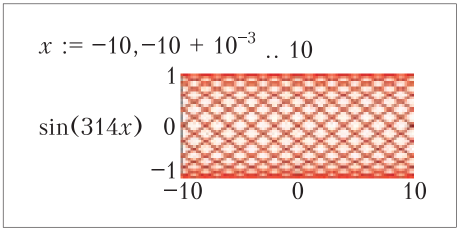


Рис. 1. «График» функции $y = \sin(314x)$ составлен из точек вида $(x_i; \sin(314x_i))$, где $x_i = i \cdot 10^{-3}$

Отметим, что рисунок 1 был построен в среде Mathcad. При этом предваряющая его строка означает, что функция $y = \sin(314x)$ вычисляется в точках x_i, $x_i = i \cdot 10^{-3}$, где i пробегает все целые от -10^4 до 10^4, и сама картинка состоит из точек с координатами

$$(x_i; \sin(314x_i)).$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200305

Вроде бы это и есть стандартный способ поточечного построения графика функции. Но, несмотря на это, рисунок 1 все-таки выглядит слишком необычно, и мы должны дать ему адекватное объяснение.

Об округлении. В процессе перехода от частоты $f = 50$ Гц к циклической частоте мы округлили $10^2\pi$ до целого и получили 314 – три первые цифры числа π, $\pi = 3{,}14159265\ldots$ Давайте проделаем то же самое округление для других степеней 10. Пусть k_m – ближайшее целое к $10^m\pi$. Тогда

$$k_m = 10^m\pi + \delta_m,$$

где δ_m – некоторое число, удовлетворяющее неравенству

$$-0{,}5 < \delta_m < 0{,}5\,.$$

Вот несколько первых из этих пар чисел:

m	k_m	δ_m
0	3	−0,142…
1	31	−0,416…
2	314	−0,159…
3	3142	0,407…
4	31416	0,073…
5	314159	−0,265…
6	3141593	0,346…

Табл. 1. Здесь k_m – ближайшее целое к $10^m\pi$, $\delta_m = k_m - 10^m\pi$

Тут мы видим $k_2 = 314$, и можно сказать, что рисунок 1 – это попытка изображения графика функции $y = \sin(k_2x)$. Давайте построим графики других функций $y = \sin(k_mx)$, может быть, мы увидим еще что-нибудь необычное.

Построение графиков. Для их размещения мы используем ту же самую таблицу 1, добавив к ней еще один столбец. Так же, как на рисунке 1, графики будут изображаться точками $(x_i; \sin(k_mx_i))$, где $x_i = i\cdot 10^{-3}$.

Первый график $y = \sin(3x)$ в таблице 2 выглядит вполне узнаваемо. Следующий график $y = \sin(31x)$ выглядит достаточно объяснимо – высокочастотные колебания заполняют почти что весь прямоугольник $[-10; 10]\times[-1; 1]$. При $m = 2$ мы имеем тот же самый рисунок 1, и это не график какой-либо функции, так же и при $m = 3$. А вот при $m = 4, 5, 6$ все это больше похоже на графики медленно меняющихся синусов, но совсем не на графики высокочастотных $\sin(3146x)$, $\sin(31459x)$ и $\sin(314593x)$.

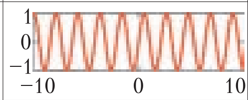
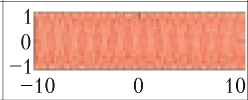
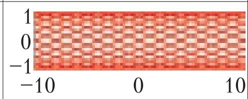
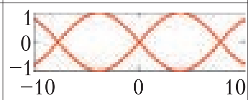
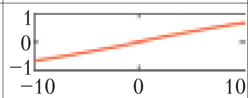
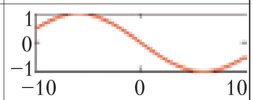
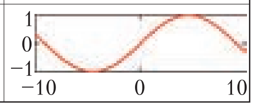
m	k_m	δ_m	$y = \sin(k_mx)$
0	3	−0,142…	
1	31	−0,416…	
2	314	−0,159…	
3	3142	0,407…	
4	31416	0,073…	
5	314159	−0,265…	
6	3141593	0,346…	

Табл. 2. «Графики» функций $y = \sin(k_mx)$ составлены из точек $(x_i; \sin(k_mx_i))$, где $x_i = i\cdot 10^{-3}$

Почему графики так странно выглядят? Воспользовавшись тем, что $k_m = 10^m\pi + \delta_m$ и $x_i = i\cdot 10^{-3}$, преобразуем выражение $\sin(k_mx_i)$ следующим образом:

$$\sin(k_mx_i) = \sin\left(10^m\pi x_i + \delta_mx_i\right) = \sin\left(i\cdot 10^{m-3}\pi + \delta_mx_i\right).$$

Это основная формула. Именно она позволяет дать все необходимые объяснения.

• Если $m > 3$, то $10^{m-3}\pi$ кратно 2π и мы имеем

$$\sin(k_mx_i) = \sin(\delta_mx_i)\,.$$

Поэтому все графики для $m > 3$, приведенные в таблице 2, – это обычные графики медленно меняющихся синусов $y(x) = \sin(\delta_m x)$. Напомним, что $|\delta_m| < 0{,}5$.

• Если $m = 3$, то $10^{m-3} = 1$. Отсюда

$$\sin(k_3 x_i) = \sin(i\pi + \delta_3 x_i),$$

и, в зависимости от четности i, точки $(i; \sin(k_3 x_i))$ поочередно лежат либо на графике функции $y(x) = \sin(\delta_3 x)$, либо на графике функции $y(x) = -\sin(\delta_3 x)$ и зарисовывают обе эти синусоиды. Что тоже соответствует таблице 2.

• Наконец, при $m = 2$ имеем $10^{m-3} = \frac{1}{10}$,

$$\sin(k_2 x_i) = \sin\left(\frac{i}{10}\pi + \delta_2 x_i\right) = \sin\left(\frac{i}{20}2\pi + \delta_2 x_i\right),$$

и точка $(i; \sin(k_2 x_i))$, в зависимости от j – остатка при делении i на 20, лежит на одной из 20 медленно меняющихся синусоид $y(x) = \sin\left(\frac{j}{20}2\pi + \delta_2 x_i\right)$, $j = 0,\ldots,19$, что опять-таки соответствует таблице 2.

Так что рисунок 1 получил свое объяснение и, похоже, мы справились со своей задачей. Дополнительно мы выяснили, что при $m = 0$ видом графика $y = \sin(k_m x)$ управляет число k_m из второго столбца таблицы 2, а при $m > 3$ – число δ_m из третьего столбца.

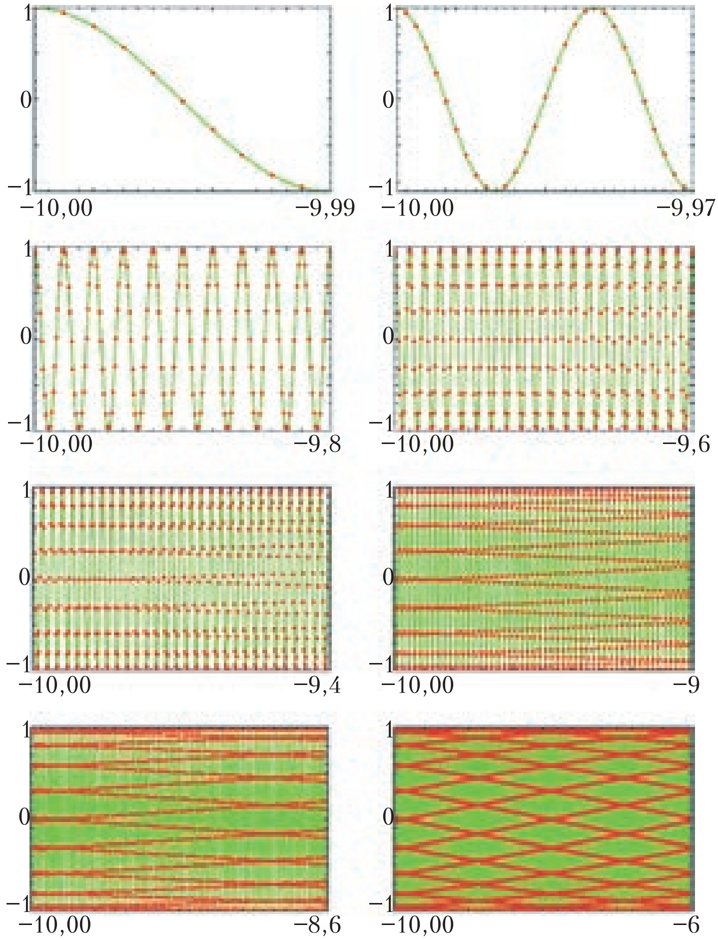


Рис. 2. Графики функции $y = \sin(314x)$ над отрезками $[-10; t]$, построенные двумя способами

Как график выглядит на самом деле? Насчет того, как на самом деле выглядит график функции $y = \sin(314x)$, трудно дать короткий и безусловный ответ. Я бы полагал, что на экране компьютера правильно построенный график этой функции, с учетом диапазона изменения $x \in [-10; 10]$, выбранного масштаба и пиксельной структуры экрана, должен заполнять целый прямоугольник.

Без вычислений. Добавим еще серию картинок (рис.2), которые позволяют понять происхождение рисунка 1 уже без всяких вычислений. На этих картинках над каждым из восьми отрезков $[-10; t]$, $t \in \{-9{,}99; -9{,}97; -9{,}8; -9{,}6; -9{,}4; -9; -8{,}6; -6\}$, двумя способами строится график функции $y = \sin(314x)$. Зеленым цветом рисуется непрерывная кривая, а красные точки так же, как на рисунке 1, имеют координаты $\left(i \cdot 10^{-3}; \sin\left(314 \cdot i \cdot 10^{-3}\right)\right)$. На первых картинках можно сосчитать, что на каждом периоде синусоиды $y = \sin(314x)$ лежит 20 красных точек. С ростом t они сливаются в 20 медленно меняющихся синусоид.

На самом деле отдельные изображения на рисунке 2 – это кадры, вырезанные из видео «20 in 1» (см. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6e/20_in_1.webm).

Упражнения. И вот под конец еще несколько компьютерных упражнений на ту же самую тему. В каждом из них нужно построить некоторые графики и объяснить полученные результаты.

1. Заменим основание 10 основанием 3. Определим числа k_m и δ_m условиями $k_m = 3^m\pi + \delta_m$, $|\delta_m| < 0,5$, k_m – целое. Постройте графики функций $y = \sin(k_m x)$, используя точки $(x_i; \sin(k_m x_i))$, где $x_i = i \cdot 3^{-6}$, $i = -10 \cdot 3^6, \ldots, 10 \cdot 3^6$.

2. На этот раз возьмем основание 2. Определим числа k_m и δ_m условиями $k_m = 2^m\pi + \delta_m$, $|\delta_m| < 0,5$, k_m – целое. Постройте графики функций $y = \sin(k_m x)$, используя точки $(x_i; \sin(k_m x_i))$, где $x_i = i \cdot 2^{-10}$, $i = -10 \cdot 2^{10}, \ldots, 10 \cdot 2^{10}$.

3. А сейчас откажемся от округления. Постройте графики функций $y = \sin(10^m \pi x)$, используя точки $(x_i; \sin(10^m \pi x_i))$, где $x_i = i \cdot 10^{-3}$, $i = -10^4, \ldots$ $\ldots, 10^4$.

4. До сих пор мы строили графики синусов по точкам. Но в компьютерной математике есть еще одна традиция, когда при построении графика на экран компьютера выводятся не отдельные точки, а целиком отрезки, соединяющие соседние точки, в нашем случае $(x_i; \sin(kx_i))$ и $(x_{i+1}; \sin(kx_{i+1}))$. Как будут выглядеть графики синусов из упражнения 2, построенные с помощью отрезков?

ИНФОРМАЦИЯ

Очередной набор в ВЗМШ

Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ) приглашает школьников и учителей из всех регионов России, ближнего и дальнего зарубежья для обучения по программам дополнительного дистантного (он-лайн) образования. ВЗМШ – старейший в России центр дополнительного образования. Она была основана в 1964 году по инициативе выдающихся математиков, академиков И.Г. Петровского (в то время ректора МГУ) и И.М. Гельфанда. Непрерывность образовательной традиции в сочетании с современными информационными технологиями позволяет ВЗМШ и поныне оставаться лучшей заочной школой страны.

Наши контакты

Сайт: https://vzms.ru/
ВК: https://vk.com/vzmsh
Телефоны:
+7 (495) 939-39-30,
+7 (926) 280-28-20
Электронная почта: pk@vzms.ru (прием), vzms2015@mail.ru (общая почта школы)
Адрес: 119234, Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (Второй учебный корпус, ауд. 307)

Мы учим математике, физике, информатике, биологии, филологии, истории, обществознанию.

Наши преподаватели – это сотрудники МГУ имени М.В.Ломоносова и других ведущих вузов и академических институтов. Ими написана обширная библиотека уникальных учебных пособий по математике, истории, обществознанию и другим предметам. Созданные ими методики позволяют вести заочное (он-лайн) обучение на самом высоком уровне.

Обучение старшеклассников в ВЗМШ направлено прежде всего на подготовку к олимпиадам и ЕГЭ. Однако мы считаем, что даже самая высокая оценка не может быть самоцелью. У нас занимаются прежде всего такие ученики, для которых на первом месте стоит саморазвитие, которые хотят знать СВЕРХ ТОГО, сверх школьной программы, и приобрести дополнительные знания по самым разным предметам.

ВЗМШ окончили более 200 тысяч – несколько поколений – школьников. Из их рядов вышло множество ученых, исследователей, педагогов. Многим учеба в ВЗМШ помогла лучше ориентироваться в жизни, ставить перед собой большие задачи, добиваться задуманного.

ВЗМШ, в отличие от курсов или кружков, это самая настоящая школа, со своей программой, ритмом, контрольными работами, двусторонней связью между учеником и учителем. Для учащихся работают форумы, в которых они могут задать любой интересующих их вопрос преподавателю – и получить полный и исчерпывающий ответ. Мы предоставляем наши материалы в электронном виде, постоянно общаемся с нашими учениками через социальные сети, WhatsApp и другие передовые средства связи, рассказываем им о том, что не входит в программу обучения, но помогает их развитию, знакомим с книгами и статьями наших преподавателей, проводим видеоконференции и видеолекции.

В ВЗМШ существует особая форма работы – группа «Коллективный ученик». Это группа школьников, работающая по методическим пособиям ВЗМШ под руководством школьного учителя по тем же программам и пособиям, что и индивидуальные ученики.

В помощь учителям – кураторам таких групп – разрабатываются специальные методические и учебные материалы. Ученики под руководством учителя вместе обсуждают пройденный материал, полученные задания. Учителя часто пользуются своей связью с ВЗМШ для выяснения и других, не связанных с работой группы, вопросов преподавания. Сотрудничество с ВЗМШ, как показывает наш многолетний опыт, многие учителя воспринимают и как свою собственную учебу.

Обучение в формате «Коллективный ученик» имеет следующие преимущества: контакт с учителем упрощает обучение, что особенно важно для тех школьников, которым сложно самостоятельно, без наставника, организовать свое время; совместные занятия создают творческую атмосферу, в которой есть место и для конкуренции, и для кооперации; присылаемые из ВЗМШ материалы могут служить учителю хорошей базой для организации в школе кружка или факультатива, помогают подготовить учеников к участию в олимпиадах и сдаче ЕГЭ; ученики принимаются без выполнения вступительного задания; плата за обучение одного ученика меньше, чем при индивидуальном обучении.

Подробно ознакомиться с программами обучения, зарегистрироваться, выполнить вступительные задания (постарайтесь сделать это до 20 июня 2020 г.), а также подать заявку для группы «Коллективный ученик» можно здесь: https://sdo.vzms.ru/

Приступить к обучению можно в любое время!

Расскажем о наших отделениях подробнее и приведем условия соответствующих вступительных заданий.

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ

Будущих математиков мы обучаем работать с научными текстами, четко излагать свою мысль, предоставляем возможность, используя наши пособия, продвинуться в изучении различных математических вопросов настолько далеко по сравнению с необходимым минимумом, насколько они сами этого хотят.

Мы помогаем углубить и расширить полученные в школе знания, подготовиться к ЕГЭ, ОГЭ и прочим экзаменам.

Тем, кому уже ведомо удовольствие от решения математических задач, мы надеемся доставить радость от размышления над новыми, похожими и вовсе не похожими на прежние. Мы обучаем всех наших учеников рассуждать безупречно и стройно.

Мы последовательно обучаем школьников с 4 по 11 класс. Начать обучение можно с любого класса.

Вступительное задание

Возможно, вы не сможете выполнить все задания своего класса, присылайте решения тех, которые сделать удалось. Не забудьте обосновать свои ответы.

Для поступления в **4 класс** математического отделения задания не предусматриваются.

5 класс

1. Бурундуки Чип и Дейл должны запасти одинаковое количество орехов на зиму. После того как Чип принес 120, а Дейл – 147 орехов, Чипу осталось запасти орехов в четыре раза больше, чем Дейлу. Сколько орехов должен запасти каждый из них?

2. Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие – втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 648 метров. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

3. Известно, что в январе четыре пятницы и четыре понедельника. На какой день недели приходится 1 января?

6 класс

1. На поляну прилетело 35 ворон. Неожиданно вороны взлетели и разделились на две стаи: одна стая уселась на ветви старой березы, а другая – на ольху. Через некоторое время с березы на ольху перелетело 5 ворон, столько же ворон совсем улетело с березы, после чего на березе осталось вдвое больше ворон, чем на ольхе. Сколько ворон было в каждой из двух стай первоначально?

2. На карточках были написаны числа 1, 2, 3, …, 111. Ваня взял себе карточки с четными номерами, а Таня – с нечетными. У кого из них сумма чисел на карточках получилась больше и на сколько?

3. На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Разбейте его на 5 частей одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки так, что суммарная длина проведенных отрезков не превосходит 16 клеток.

7 класс

1. Иннокентий хочет записать по кругу 2015 натуральных чисел так, чтобы для каждых двух соседних чисел частное от деления большего на меньшее было простым числом. Его друг Макар утверждает, что это невозможно. Кто прав?

2. В правильном 2018-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

3. У юного художника была одна банка синей и одна банка желтой краски, каждой из которых хватает на покраску 38 дм^2 площади. Использовав всю эту краску, он нарисовал картину: синее небо, зеленую траву и желтое солнце. Зеленый цвет он получал, смешивая две части желтой краски и одну часть синей. Какая площадь на его картине закрашена каждым цветом, если площадь травы на картине на 6 дм^2 больше, чем площадь неба?

4. Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

8 класс

1. Два города A и B расположены на берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга. Пароход может проплыть из A в B и обратно за 1 час. Больше или меньше времени понадобится ему, чтобы проплыть 20 км по озеру?

2а. Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

2б. Аналогичный вопрос, если расставлять по ребрам куба числа −6, −5, −4, −3, −2, −1, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3. Найдите целые числа x и y такие, что $x > y > 0$ и $x^3 + 7y = y^3 + 7x$.

9 класс

1. Найдите целые числа x и y такие, что $x > y > 0$ и $x^3 + 7y = y^3 + 7x$.

2. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.

3. Разложите на два множителя: $x^5 + x + 1$.

4. Докажите, что при $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

5. Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

10 класс

1. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.

2. Разложите на три множителя: $x^8 + x^4 + 1$.

3. Разложите на два множителя: $x^5 + x + 1$.

4. Докажите, что при $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

5. Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

11 класс

1. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.

2. Разложите на три множителя: $x^8 + x^4 + 1$.

3. Разложите на два множителя: $x^5 + x + 1$.

4. Докажите, что при $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

5. Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

6. Известно, что $a + b + c < 0$ и что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Определите, какой знак имеет число c.

7. Можно ли восстановить треугольник по серединам его сторон? А четырехугольник? Любой ответ требует доказательства!

ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКИ

Если вы интересуетесь физикой, хотите понять ее немножко глубже, чем объясняют в школе, собираетесь изучать физику в вузе – поступайте к нам!

Мы объясняем, как решать типичные для ЕГЭ задачи (в том числе повышенной сложности), рассказываем о математических методах современной физики и многих других вопросах, которые остаются за рамками школьной программы по физике.

Мы предлагаем программы обучения различной длительности и уровня сложности для школьников 9–11 классов: 9-классники учатся три года (курс Ф3), 10-классники – два (курс Ф2), 11-классники – один (курс Ф1). Есть и программа углубленного изучения физики для 11-классников (курс Ф0).

E-mail: olphys@phys.problems.ru

Сайт: http://phys.problems.ru

Вступительное задание

Укажите, на какой курс вы хотите поступать. Поступающие на курс Ф3 (9 класс) решают задачи 1–5, на курс Ф2 (10 класс) решают задачи 4–9, на курс Ф1 (11 класс) – задачи 5–10, поступающие на углубленную программу Ф0 – задачи 4–10. Не переживайте, если вы смогли решить не все задачи!

1. Экспресс, двигаясь с постоянной скоростью, проезжает мимо светофора за время $t_0 = 8$ с, а затем последовательно обгоняет две электрички одинаковой длины, затрачивая на это времена $t_1 = 20$ с и $t_2 = 15$ с. Сколько времени первая электричка будет обгонять вторую, если ее скорость в полтора раза больше, чем у второй?

2. Белый медведь массой $m = 400$ кг спит на льду. Лед раскалывается, и медведь оказывается на плавающей льдине площадью $S = 12$ м^2. При какой минимальной толщине льдины медведь может остаться сухим?

3. Рядом висят три термометра, первый проградуирован по шкале Цельсия, второй – по шкале Фаренгейта, а третий – по шкале Реомюра. Показания второго и третьего термометров отличаются от показаний первого термометра на одинаковую величину. Сколько градусов показывает первый термометр?

4. На рисунке 1 изображена электрическая схема, собранная из одинаковых лампочек.

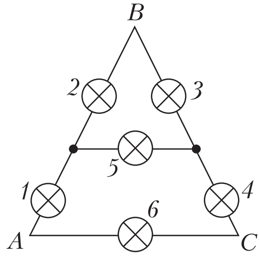


Рис. 1

Какая лампочка будет гореть ярче всех при подключении постоянного напряжения к точкам A и B?

5. При прохождении пограничного контроля детей иногда просят посмотреть в узкое зеркало, висящее над ними в проходе под углом 45° к горизонту (рис.2). Ширина

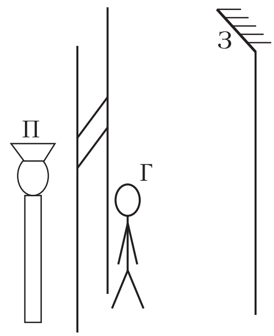


Рис. 2

прохода $s = 1$ м, голова ребенка (Г) на $h = 40$ см ниже уровня глаз пограничника (П), а зеркало (З) висит на $L = 1$ м выше этого уровня. На каком расстоянии от себя пограничник видит изображение лица ребенка в зеркале?

6. В центре гладкой тележки с бортиками лежит маленькое тело. Тележка начинает ехать с постоянной скоростью $u = 10$ см/с. Постройте график зависимости перемещения тела относительно земли от времени.

Расстояние между бортиками $s = 20$ см.

7. С какой минимальной скоростью нужно бросить снежок, чтобы попасть в окно третьего этажа, находясь на расстоянии $L = 15$ м от дома? Высота окна $h = 1{,}5$ м, нижний край окна находится на высоте $H = 6$ м над землей.

8. Палочка лежит на гладкой опоре, упираясь одним концом в шероховатую стенку,

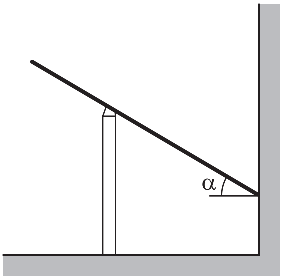


Рис. 3

как показано на рисунке 3. Длина палочки в $k = 1{,}5$ раза больше расстояния от опоры до стенки. Каким должен быть коэффициент трения палочки о стенку, чтобы она могла находиться в равновесии под углом α к горизонту?

9. В круглом стеклянном сосуде находится $\nu = 1/10$ моль азота при температуре $t = 20$ °С и давлении $p = 1$ атм. Оцените количество ударов молекул газа о стенки сосуда за время $\Delta t = 1$ с.

10. В схеме, изображенной на рисунке 4 и

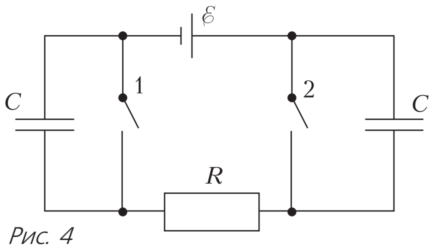


Рис. 4

состоящей из батарейки, двух одинаковых конденсаторов и резистора, в начальный момент ключи 1 и 2 замкнуты. В каком случае на резисторе выделится больше тепла: если ключи разомкнуть одновременно или по очереди через большой промежуток времени? Внутренним сопротивлением батарейки пренебречь.

ОТДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАТИКИ

Мы будем рады видеть на нашем отделении школьников 8–11 классов, которые планируют связать свое будущее с самыми перспективными направлениями – ИТ, программированием, аналитикой.

У нас работает 6 программ – по одной для 8 и 9 классов и по две (базовый и углубленный уровни) – для 10 и 11 классов.

При поступлении на отделение информатики нет вступительных испытаний – дело в том, что в школах очень по-разному преподается этот предмет.

ОТДЕЛЕНИЕ БИОЛОГИИ

Цель биологического отделения – помочь школьникам углубить и расширить свои знания, а также познакомиться с современными методами и достижениями науки.

Программа биологического отделения включает в себя наиболее интересные темы, которым в базовом школьном курсе уделяется мало внимания: это физиология растений, цитология и генетика, теория систематики, физиология человека и животных и некоторые другие разделы.

Наши пособия и учебные материалы в первую очередь приучают школьников к самостоятельной творческой работе, дают им возможность приобретения навыков письменного изложения своих мыслей, выдвижения и критического анализа различных гипотез, работы с биологической литературой. Каждый учащийся биологического отделения получает куратора, который проверяет работы и отвечает на возникшие вопросы, а также помогает школьнику увидеть свои слабые места и их скорректировать. Это обеспечивает получение школьниками информации «из первых рук», знакомство с фактами и теориями, которые еще не успели войти в школьные учебники.

В зависимости от класса – 8 или 9 – школьники учатся на биологическом отделении ВЗМШ 2 или 3 года. Закончившие 8 классов поступают на 1 курс, а 9 классов – на 2, по окончании 3 курса все ученики, выполнившие программу обучения (по схемам 1-2-3 или 2-3), получают диплом об окончании биологического отделения ВЗМШ.

Вступительное задание

1. Составьте определитель (в форме тез и антитез) овощей, продающихся в магазине, по внешнему виду, собрав в нем десяток видов, наиболее типичных для вашей местности. Включать в определитель полные описания не нужно – только те признаки, которые реально могут быть использованы для отличия одних овощей из вашей выборки от других.

2. На океаническом дне обитают представители самых разных групп животных. Какие приспособления к такому образу жизни у них возникли? Для каждого из указанных вами приспособлений приведите один-два примера животных, у которых оно имеется.

3. При разведении животных в неволе имеет место эффект так называемого «вырождения» – уменьшения жизнеспособности из-за близкородственного скрещивания. Интересно, что у разных видов животных вырождение наступает с разной скоростью – в то время как одним видам хватает нескольких поколений, чтобы начать вырождаться, у других маленькие близкородственные популяции могут существовать достаточно долго. Как можно объяснить это явление? С какими особенностями вида может быть связано быстрое или медленное вырождение?

4. Апоптоз – запрограммированная клеточная гибель. Когда клетка получает сигнал к запуску апоптоза, она фактически оканчивает жизнь самоубийством. Подумайте – в каких случаях это может быть полезно для организма? С какими проблемами столкнется человек, если механизм апоптоза в его клетках отключится?

5. В настоящее время на наших глазах разворачивается пандемия нового коронавируса. Расскажите, как вы понимаете:

а) чем этот вирус опаснее предыдущих;

б) как быстро может появиться лекарство, помогающее в случае нового заболевания, или предупреждающее его;

в) какие меры могут быть приняты для предотвращения или замедления эпидемии?

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники (для сведений, взятых из интернета, – точный адрес страницы, с которой вы их взяли).

ОТДЕЛЕНИЕ ФИЛОЛОГИИ

Мы помогаем желающим систематизировать и углубить имеющиеся знания, расширить свой кругозор, приобрести навыки исследовательской работы.

Объект нашего интереса, внимания и исследования, конечно же, Слово. Родное и «чужое», «претворенное» метафорой, образное, терминологически точное. Как правильно написать и к месту использовать; как учесть системные связи; как увидеть и оценить уникальность работы со Словом великих Мастеров? Сколько с ним проблем – у многих, и как приятно встретить к нему интерес – пусть у некоторых!

Наши курсы будут полезны и тем, и другим. Прагматики смогут повысить грамотность, научиться решать олимпиадные лингвистические задачи, подготовиться и хорошо сдать ЕГЭ. Те же, кто получает удовольствие от общения с художественным текстом, научатся размышлять над поэзией и прозой русских классиков и писать сочинения, отвечающие требованиям ДВИ (дополнительных вступительных испытаний) филологических факультетов вузов.

Ученик филологического отделения находится в постоянном взаимодействии со своим преподавателем, который в рецензии к работе обязательно дает рекомендации, как улучшить результат, а при необходимости индивидуально подбирает дополнительные задания для отработки темы или литературу для более глубокого понимания исследуемого материала.

Вступительное задание

1. Подумайте и напишите, что не так с выражениями: *остался за бортом разбитого корыта; довести до белого колена; не мудрствуя долго; ни зги не брезжит; ни слуху ни пера; скрипя сердцем; шито-крыто белыми нитками; не в коне корм.*

2. Определите часть речи: (НА)ВСТРЕЧУ, ОЗАБОЧЕ(Н/НН)О. Придумайте предложения, которые помогут доказать вашу точку зрения.

3. Вспомните трех героев русской литературы с «говорящими» фамилиями. Предложите для каждого из них две другие, тоже «говорящие» об их свойствах и качествах, и объясните свой выбор.

4. В приведенном ниже отрывке из пушкинского «Евгения Онегина» найдите аллитерацию и попытайтесь объяснить: зачем автор использует этот фонетический прием, почему именно так?

Бывало,
Когда гремел мазурки гром,
В огромной зале все дрожало,

Паркет трещал под каблуком,
Тряслися, дребезжали рамы;
Теперь не то: и мы, как дамы,
Скользим по лаковым доскам.
Но в городах, по деревням
Еще мазурка сохранила
Первоначальные красы:
Припрыжки, каблуки, усы...

ОТДЕЛЕНИЕ ИСТОРИИ

Обучение на историческом отделении позволит расширить кругозор, подготовиться к олимпиадам по истории, получить высокий балл по ЕГЭ, ОГЭ и другим экзаменам.

Каждый раздел курса посвящается определенному периоду российской истории, сопровождается множеством иллюстраций, историческими документами, сводами дат, династическими таблицами, которых не найдешь в обычном учебнике. Такие материалы помогут не просто запомнить пройденное, но и понять содержание эпохи. Ведь мы учим не просто запоминать, но и размышлять!

На каждое выполненное задание мы даем свой комментарий: ученик не просто знает, правильно ли он ответил, а узнает, почему верен или неверен именно такой ответ.

Мы рекомендуем лучшие учебники и пособия, но предлагаем свой, оригинальный, проверенный временем курс. На нашем форуме можно задавать вопросы преподавателям. Отвечают они незамедлительно.

Программа обучения рассчитана на школьников старших классов.

Вступительное задание

1. Сколько правительниц государства насчитывает история России?

2. Какой сборник законов из ниже перечисленных был первым, изданным массовым тиражом?

1) Судебник Ивана III. 2) Судебник Ивана IV. 3) Соборное Уложение. 4) Воинский артикул Петра I.

3. Почему в совхозе был директор, а в колхозе председатель?

ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕСТВОЗНАНИЯ

Когда наук много, а предмет один, – это обществознание. Наш курс нацелен на подготовку к ЕГЭ, ОГЭ, олимпиадам по этому предмету и входящим в его состав дисциплинам, в том числе по экономике, праву, политологии, социологии, философии. Он будет интересен и тем, кто просто хочет стать разносторонне образованным человеком.

Задания ЕГЭ по обществознанию, особенно второй части этого экзамена, задания олимпиад очень сложные. Поэтому мы объясняем каждый ответ (неважно, верен он или нет), а не просто ставим баллы за его выполнение.

Особое место мы уделяем самому сложному заданию экзамена – написанию эссе. Только такая обратная связь позволяет вдумчиво и полноценно подготовиться к любым экзаменам. Эту же цель преследует форум, на котором ученики могут задать любой вопрос преподавателю. Кроме того, с преподавателем можно связаться через WhatsApp.

Программа обучения рассчитана на школьников старших классов.

Вступительное задание

1. Руритания, согласно ее Конституции, является социальным государством. Приведите примеры положений, которые могут быть включены в Конституцию Руритании, которые отражали бы данную характеристику.

2. Кристина увлекается орнитологией: весной она записывает пение разных птиц, летом проводит наблюдения за их гнездованием, осенью наблюдает, как собираются на юг перелетные птицы, в школе она делает на уроках доклады о жизни пернатых. Данные факты характеризуют Кристину как

1) личность, 2) индивида, 3) генотип, 4) гражданку.

3. Использование только доказанных фактов, законов и теорий, особого языка характерно для

1) религии, 2) морали, 3) науки, 4) искусства.

4. Одной из главных экономических проблем является

1) условия жизни, 2) ограниченность ресурсов, 3) лень, 4) альтернативная стоимость.

5. Для какого из исторических типов обществ характерно становление массового стандартизированного серийного производства, механизация и автоматизация производственных процессов, безусловное преобладание экономических стимулов к труду?

1) Аграрного, 2) информационного, 3) традиционного, 4) индустриального.

Региональный этап XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

1. Изначально на столе лежали 10 куч конфет, в которых было 1, 2, …, 10 конфет соответственно. Малыш решил перераспределить конфеты. На каждой нечетной минуте он выбирает одну из куч и делит ее на две кучи, в каждой из которых хотя бы по одной конфете. На каждой четной минуте он выбирает две кучи и объединяет их в одну (таким образом, первым действием он делит кучу на две). Может ли в некоторый момент оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет?

Н.Агаханов, жюри

2. На доске написаны n различных целых чисел, любые два из них отличаются хотя бы на 10. Сумма квадратов трех наибольших из них меньше трех миллионов. Сумма квадратов трех наименьших из них также меньше трех миллионов. При каком наибольшем n это возможно?

Р.Женодаров, С.Берлов

3. См. задачу М2595,а «Задачника «Кванта».

4. См. задачу М2597 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М2596 «Задачника «Кванта».

6. Петя и Миша стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Миши на 2% больше скорости Пети. Петя все время бежит против часовой стрелки, а Миша может менять направление бега в любой момент, непосредственно перед которым он пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Миша может трижды, не считая момента старта, поравняться с ним (встретиться или догнать).

И.Рубанов

7. Зеленый хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врет и после этого немедленно зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов (зеленых и коричневых) каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зеленых. Ответами были числа 1, 2, 3, …, 2019 (в некотором порядке, причем не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зеленых хамелеонов могло быть изначально?

Р.Женодаров, О.Дмитриев

8. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Окружность, описанная около треугольника ABL, пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что точка S, симметричная точке C относительно прямой DL, лежит на стороне AB и не совпадает с ее концами. Какие значения может принимать $\angle ABC$?

Б.Обухов, жюри

9. Назовем многоугольник хорошим, если у него найдется пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечетное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший?

И. Богданов

10. Докажите, что для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_9$ верно неравенство

$$\frac{x_1-x_3}{x_1x_3+2x_2x_3+x_2^2}+\frac{x_2-x_4}{x_2x_4+2x_3x_4+x_3^2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x_8-x_1}{x_8x_1+2x_9x_1+x_9^2}+\frac{x_9-x_2}{x_9x_2+2x_1x_2+x_1^2}\geq 0.$$

П.Бибиков

10 класс

1. Найдите хотя бы одно четырехзначное число, обладающее следующим свойством: если сумму всех цифр этого числа умножить на произведение всех его цифр, то в результате получится 3990.

И.Рубанов

2. Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдется число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

Д.Храмцов

3. См. задачу М2595,б «Задачника «Кванта».

4. См.задачу 4 для 9 класса.

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. На доске написано выражение $\cos x$. Разрешается сложить или перемножить несколько написанных на доске выражений (одно выражение может использоваться несколько раз) и дописать полученное новое выражение на доску. Можно ли за несколько действий получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0?

Н.Агаханов

7. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены прямоугольники. Оказалось, что все вершины этих прямоугольников, отличные от точек A, B, C, D, лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – вписанный.

А.Кузнецов

8. На доске пишут n квадратных трехчленов вида $*x^2 + *x + *$ (вместо коэффициентов написаны звездочки). Можно ли при каком-либо $n > 100$ поставить вместо $3n$ звездочек некоторые $3n$ последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы каждый из n данных трехчленов имел два различных целых корня?

О.Южаков

9. См. задачу 9 для 9 класса.

10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т.е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из Петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

М.Антипов

11 класс

1. На доске написано n различных целых чисел. Произведение двух наибольших равно 77. Произведение двух наименьших тоже равно 77. При каком наибольшем n это возможно?

Р.Женодаров, жюри

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. На стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH – точка E, а на отрезке CH – точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90°$.

Б.Обухов

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. В таблице $N \times N$ расставлены все натуральные числа от 1 до N^2. Число назовем *большим*, если оно наибольшее в своей строке, и *малым*, если оно наименьшее в своем столбце (таким образом, число может быть и большим, и малым одновременно, а может не быть ни тем, ни другим). Найдите наименьшую возможную разность между суммой всех больших чисел и суммой всех малых чисел.

С.Токарев

6. На доске написаны функции $x+1$, x^2+1, x^3+1, x^4+1. Разрешается дописывать на доску новую функцию, получаемую из двух уже написанных на доске с помощью операций вычитания или умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента – неположительные значения.

Н.Агаханов

7. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не являлась степенью двойки?

Д.Храмцов

8. См. задачу М2594 «Задачника «Кванта»

9. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

А.Кузнецов

10. См. задачу 10 для 10 класса.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, М.Григорьев, П.Кожевников, О.Подлипский

Региональный этап LIV Всероссийской олимпиады школьников по физике

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

Задача 1. Две двери

Две балконные двери шириной a_1 и a_2 начинают передвигать к противоположным стенам со скоростями v_1 и v_2 соответственно (рис.1). На рисунке 3 изображен *качественный* график зависимости величины области пересечения дверей l (рис.2) от времени t. С помощью графика найдите численные значения величин a_1, a_2, v_1 и v_2.

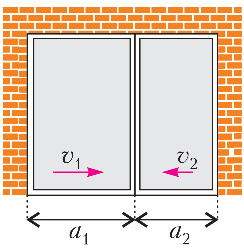


Рис. 1

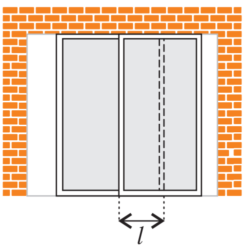


Рис. 2

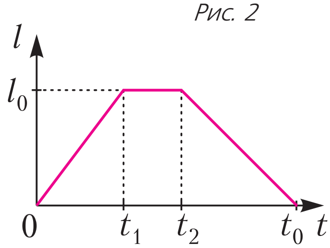


Рис. 3

Примечание. Касаясь противоположной стены, дверь останавливается. График построен без соблюдения масштаба, $l_0 = 1,8$ м, $t_1 = 6$ с, $t_2 = 15$ с, $t_0 = 30$ с.

А.Кузнецова

Задача 2. Алиса в кофейне чудес

В выходной день Алиса с подружками пошла в кафе «Шоколадница». Шли они с постоянной скоростью. Придя в кафе, Алиса построила график зависимости своей средней скорости от времени, включая время, когда она пила кофе (рис.4). Перед уходом Алиса решила порадовать своих подписчиков в Instagram новой публикацией. Потянувшись за телефоном, девочка случайно пролила остатки кофе на график. Определите:

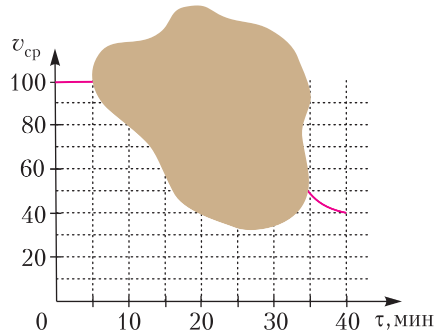


Рис. 4

1) сколько времени Алиса пила кофе в кафе;

2) в каких единицах измерения изображена скорость на графике, если путь до кофейни $s = 1,6$ км.

А.Уймин

Задача 3. Жидкость в теле

Дионисий нашел в лаборатории своего дедушки 5 внешне одинаковых тел. Мальчик вычислил среднюю плотность каждого из них. Оказалось, что они разные. В прилагаемой к телам записке упоминалось, что они содержат одинаковые полости, частично заполненные жидкостью. Масса m жидкости была написана на каждом теле. Также из записки следовало, что одно из тел отличается размером полости (бракованное). Результаты измерений средней плотности и массы налитой жидкости приведены в таблице:

№ тела	1	2	3	4	5
m, г	10	30	60	70	100
$\rho_{ср}$, г/см^3	0,9	1,3	1,9	2,5	2,7

Определите:

1) номер бракованного тела;

2) объем тела $V_к$;

3) массу $m_к$ небракованного тела без налитой жидкости.

А.Уймин

Задача 4. Глюк в «Майнкрафте»

Пока внук хозяйничал в лаборатории, экспериментатор Глюк решил поиграть в его компьютерную игру. Из 5 кубических блоков он собрал фигуру (рис.5), причем 4 блока были изготовлены из одного материала. Плотности материалов ему известны. Глюк высчитал, что средняя плотность всей этой фигуры $\rho_1 = 6{,}5$ г/см^3. Внезапно в игре неизвестное существо подбежало и украло один из блоков. Глюк пересчитал среднюю плотность, и у него получилось $\rho_2 = 6{,}125$ г/см^3. Но тут неизвестное существо опять похитило блок. Средняя плотность опять изменилась. Глюку надоело наблюдать за воровством блоков, и он выключил игру. Определите:

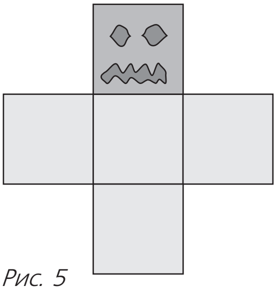


Рис. 5

1) плотность (по мнению Глюка) ρ_A верхнего кубика;

2) плотность (по мнению Глюка) ρ_B нижних кубиков;

3) среднюю плотность фигуры после второго похищения.

К.Кутелев

8 класс

Задача 1. Эффект Доплера

Геолог отправился на моторной лодке из базового лагеря вверх по реке. Из-за отсутствия связи с лагерем он через каждые $\Delta t = 0{,}5$ ч бросал в воду пронумерованные по порядку бутылки с информацией о своей экспедиции (через полчаса после отправления – первую, через час – вторую и т.д. вплоть до возвращения в лагерь). В первое время после начала экспедиции эти бутылки вылавливали в лагере через каждые $\Delta T = 1{,}5$ ч. На определенном расстоянии X от лагеря геолог быстро закрепил в русле автоматический анализатор химического состава воды, опустил в воду очередную бутылку и отправился в обратный путь, не изменяя режима работы лодочного мотора. На обратном пути он продолжил каждые полчаса бросать в воду пронумерованные бутылки. В какой-то момент он заметил, что шестнадцатая бутылка оказалась опущенной в реку рядом с восьмой, и от этого места до лагеря оставалось проплыть $L = 4$ км. Определите:

1) скорость течения реки $v_т$;

2) скорость лодки в стоячей воде $v_л$;

3) длительность T всей экспедиции геолога от отправления до возвращения в базовый лагерь;

4) на каком расстоянии X от лагеря геолог закрепил прибор;

5) через какой промежуток времени $\Delta\tau$ приплывали в лагерь бутылки, отправленные геологом на обратном пути;

6) через какое время после начала экспедиции в лагере выловили последнюю бутылку и какой у нее был номер;

7) каков номер бутылки, которая приплыла в лагерь одновременно с геологом.

С.Кармазин

Задача 2. Сообщающиеся сосуды

Два сообщающихся сосуда заполнены жидкостями до высот $2h$ (рис.6). Плотность жидкости в правом сосуде ρ, в левом $0{,}8\rho$. Сосуды смещены по вертикали на высоту $2h$. Кран в трубке изначально закрыт. В правый сосуд добавляют $5h$ жидкости с плотностью $0{,}7\rho$. Какой высоты H столб жидкости с плотностью $0{,}7\rho$ останется в правом сосуде после открывания крана? Сверху сосуды открыты. Объемом соединительной трубки можно пренебречь.

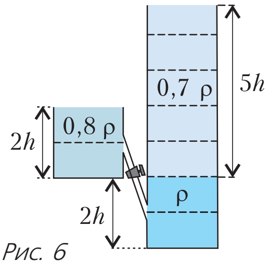


Рис. 6

М.Замятнин

Задача 3. Ледяной столб

В теплоизолированный стакан, к дну которого приморожен столбик льда, начинают наливать воду с постоянным массовым расходом. Это делают столь медленно, что температура всего содержимого стакана в каждый момент времени остается одинаковой. График зависимости массы льда от времени приведен на рисунке 7. Пренебрегая тепловыми потерями, определите начальную температуру льда $t_л$ и температуру $t_в$ наливаемой воды. Постройте график зависимости массы жидкой воды от времени в интервале 0–12 минут. Вода из стакана не вытекает.

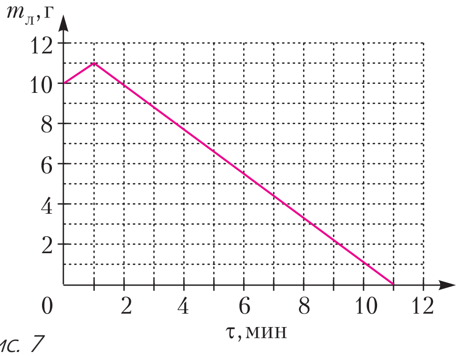


Рис. 7

Справочные данные: удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·°С), удельная теплоемкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 320$ кДж/кг.

К.Кутелев

Задача 4. В Саргассовом море

Считается, что одной из причин исчезновения судов в Саргассовом море является большое количество пузырьков газа, выделяемых водорослями (саргассами). В некотором месте A моря, когда экипаж корабля наблюдал пузырьки газа, поднимающиеся из глубины, судно было погружено на четверть своего объема. Проплыв некоторое расстояние, корабль погрузился уже наполовину, а концентрация пузырьков увеличилась вдвое. Считая, что размеры пузырьков не изменяются, определите:

1) во сколько раз плотность «газированной» воды в месте A меньше плотности обычной воды;

2) во сколько раз должна измениться концентрация пузырьков по отношению к концентрации в месте A, чтобы судно начало тонуть.

Примечание. Концентрацией пузырьков n будем называть отношение количества пузырьков в «газированной» воде к ее объему.

К.Кутелев

9 класс

Задача 1. Термостат

В термостате поддерживается постоянная температура, которая выше температуры окружающей среды. Это осуществляется с помощью нагревательного элемента, работающего в составе цепи (рис.8). В этой цепи источник можно считать идеальным, сопротивление нагревательного элемента $R_н$ в 4 раза меньше полного сопротивления реостата R, а x – это доля длины реостата, включенная в данный момент в цепь. При температуре внешней среды $t_1 = 25$ °С для поддержания требуемой температуры в термостате ползунок реостата стоит в положении $x_1 = 0{,}65$, при $t_2 = 20$ °С ползунок реостата стоит в положении $x_2 = 0{,}35$. Какой должна быть величина x при температуре внешней среды $t_3 = 13$ °С? Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур термостата и окружающей среды.

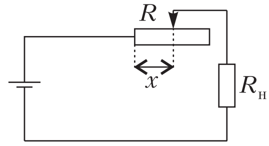


Рис. 8

К.Парфёнов

Задача 2. Силовой тренажер

На спортивной площадке установлен тренажер, схема которого показана на рисунке 9. Спортсмен, сидя на кресле, поднимает сам себя, прикладывая к верхнему рычагу некоторую силу F. Система рычагов и шарниров обеспечивает плоскопараллельное перемещение кресла. При отсутствии спортсмена для уравновешивания тренажера (верхний рычаг принимает горизонтальное положение) на кресло необходимо поместить груз массой $m = 3{,}7$ кг. Какую вертикальную силу F должен прикладывать к рычагу человек массой $M_0 = 86$ кг для того, чтобы, сидя в кресле (не касаясь земли), удерживать рычаг в горизонтальном положении? Длины рычагов, которые могут потребоваться при расчетах: $a_1 = 27{,}5$ см, $a_2 = 13{,}0$ см, $a_3 = 17{,}5$ см, $b_1 = 73{,}5$ см, $b_2 = 8{,}5$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

А.Гуденко

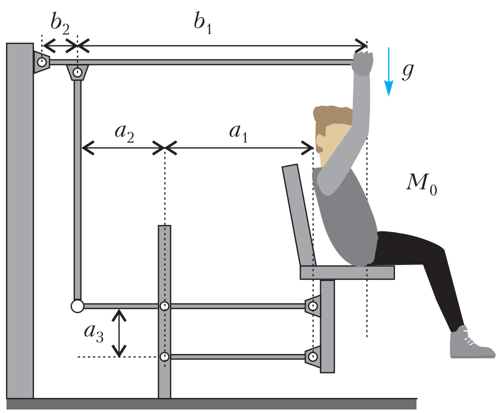


Рис. 9

Задача 3. Торможение шайбы

Шайбу толкнули по горизонтальной поверхности. Через время $\tau = 0{,}1$ с она оказалась на расстоянии $s_1 = 8$ см от начальной точки, а через время 2τ – на расстоянии $s_2 = 12$ см. Найдите значения коэффициента трения μ между шайбой и поверхностью, при которых это возможно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

И.Воробьев

Задача 4. Четыре города

Четыре города расположены в вершинах квадрата $ABCD$ (рис.10). Параллельно направлению AD дует сильный ветер (из A в

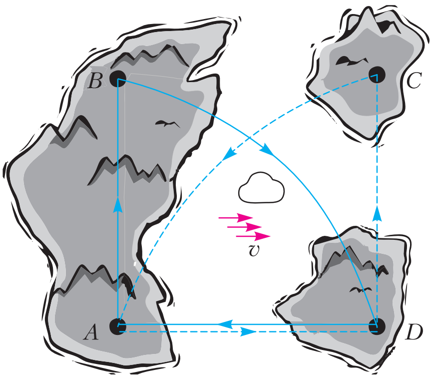


Рис. 10

D) со скоростью v. Два одинаковых самолета вылетают из города A и движутся по разным маршрутам: первый по $ABDA$, второй по $ADCA$ (BD и CA – «четвертинки» окружности). Найдите отношение времен движения самолетов по этим маршрутам. Скорость самолета при отсутствии ветра равна u.

С.Муравьев

Задача 5. Нелинейный мост

Цепь, изображенная на рисунке 11, состоит из трех одинаковых нелинейных элементов, двух резисторов и двух идеальных амперметров. Сила тока через нелинейный элемент пропорциональна квадратному корню из напряжения на нем: $I = a\sqrt{U}$. Известно, что один из амперметров показывает ток I_x, а другой I_y, причем $I_x > I_y$. Определите силу тока в каждом из элементов цепи.

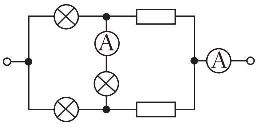


Рис. 11

10 класс

Задача 1. Шарик на нити

Находящийся на гладкой горизонтальной поверхности шарик привязан нитью к тонкой неподвижной оси. Его толкнули вдоль поверхности, и он стал двигаться по окружности. При этом сила сопротивления воздуха, действующая на шарик, направлена против его скорости и пропорциональна ей. Ускорение шарика в некоторый момент направлено под углом α к нити (рис.12). На какой угол φ повернется нить с этого момента времени до остановки шарика?

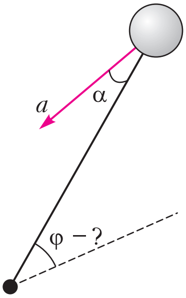


Рис. 12

И.Воробьев

Задача 2. Бильярд на льду

На горизонтальной шероховатой поверхности покоятся две одинаковые маленькие шайбы. По одной из них наносят удар клюшкой, после чего она налетает на вторую шайбу. На рисунке 13 представлены участки траекторий шайб до и после их частично упругого столкновения.

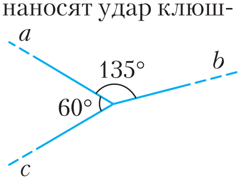


Рис. 13

1) Определите, какая из трех траекторий – a, b или c – может быть траекторией налетающей шайбы. Ответ обоснуйте.

2) Для каждого из возможных случаев дальнейшего развития событий определите: отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки после столкновения; долю кинетической энергии налетающей шайбы, которая переходит в тепло в результате столкновения.

Боковые поверхности шайб гладкие.

А.Аполонский

Задача 3. Газировка

В вертикальном цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находятся вода и углекислый газ (рис.14). Часть углекислого газа растворена в воде, а часть находится над водой в газообразном состоянии. Изначально вода занимает ровно половину объема со-

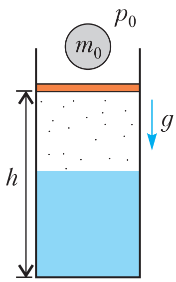


Рис. 14

суда под поршнем. Расстояние от поршня до дна сосуда $h = 20$ см, площадь поршня $S = 10$ см^2. На поршень поместили гирю массой m_0, и в результате установления равновесия поршень сместился вниз на $\Delta h_1 = 3{,}12$ см. Затем на поршень поместили еще одну, точно такую же гирю, и поршень сместился еще на $\Delta h_2 = 2{,}22$ см, вновь оказавшись в равновесии. Определите:

1) массу m_0 одной гири;

2) массу m_2 гири, которую необходимо добавить к двум первым, чтобы поршень опустился до поверхности воды.

Считайте, что температура в сосуде постоянна и при растворении углекислого газа уровень воды не изменяется. Поршень перемещается без трения. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Примечание. Масса газа, растворенного в жидкости, над которой находится такой же газ, прямо пропорциональна давлению этого газа (закон Генри).

А.Аполонский

Задача 4. Крутится, вертится...

Два небольших шарика массами m_1 и $m_2 > m_1$, соединенные тонкой нитью длиной l, плавают в цилиндрическом сосуде радиусом R, наполненном водой (рис.15). При этом нить натянута с силой T_0. Сосуд раскрутили с некоторой угловой скоростью вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. После того как система пришла в состояние равновесия, нить оказалась натянутой под углом α к вертикали (отличным от нуля), а шарики не касались дна сосуда. Найдите новую силу натяжения нити T и угловую скорость вращения сосуда ω.

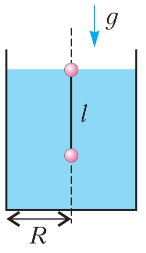


Рис. 15

А.Воронцов

Задача 5. Три элемента

Внутри «черного ящика» (ЧЯ), имеющего два вывода, собрана цепь, состоящая их трех элементов: резистора сопротивлением $R = 3{,}5$ Ом, диода с некоторым напряжением открытия $U_0 > 0$, вольт-амперная характеристика (ВАХ) диода представлена на рисунке 16,*а*, и неизвестного нелинейного элемента X. Известно, что вольт-амперная характеристика неизвестного элемента X монотонна (при увеличении напряжения на элементе сила тока, протекающего через него, не убывает). Вольт-амперная характеристика черного ящика показана на рисунке 16,*б*.

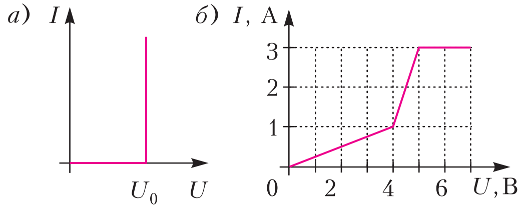


Рис. 16

1) Определите возможные схемы соединения элементов в черном ящике (при некотором напряжении на выводах черного ящика ток должен протекать через все элементы), ответ обоснуйте.

2) Найдите возможные значения напряжения открытия диода U_0.

3) Восстановите ВАХ неизвестного нелинейного элемента X.

Если возможны различные значения напряжения открытия диода, то постройте ВАХ для случаев максимально возможного напряжения U_{max} открытия диода и еще одного значения U_N, выраженного целым числом вольт.

А.Уймин, М.Карманов

11 класс

Задача 1. Диполь в шаре

В большом однородном непроводящем шаре вдоль диаметра d просверлен узкий канал (рис.17). Шар равномерно заряжен по объему с объемной плотностью заряда $\rho > 0$ и закреплен. Вещество шара не поляризуется. В начало канала помещают диполь, образованный двумя заряженными шариками одинаковой массы, закрепленными на концах легкого жесткого непроводящего стержня, и отпускают. Через время $t_д$ он оказывается на противоположном конце канала. Когда то же самое проделывают с одним из шариков, он пролетает канал за время $t_ш$. Определите плечо диполя l, считая, что $l \ll d$. Укажите знак

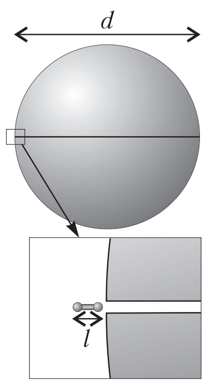


Рис. 17

ближнего к шару заряда диполя в момент старта в первом случае и знак заряда шарика во втором. Диаметр шариков практически равен диаметру канала.

Примечание. Диполем называется система из двух одинаковых по величине, но разных по знаку электрических зарядов, находящихся на фиксированном расстоянии l (плечо диполя) друг от друга.

К.Кутелев, Л.Колдунов

Задача 2. Магнитная пружина

Невесомый гибкий провод с током I образует замкнутую петлю длиной L, которая соприкасается с вертикальной стенкой и гранью куба массой m (рис.18). Система находится в магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. Исходно куб удерживают на расстоянии x_0 от стенки.

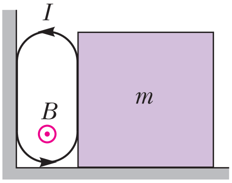


Рис. 18

1) До какой наибольшей скорости v_{max} разгонится куб, если его отпустить?

2) Через какое время t будет достигнута эта скорость?

Примечание. Считайте, что стол гладкий, а при движении куба провод остается в одной вертикальной плоскости. Магнитным полем провода с током пренебречь.

И.Воробьев

Задача 3. Обрывок из архива Кельвина

Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли диаграмму (рис.19) квазистатического циклического процесса тепловой машины, рабочим телом которой являлось неизвестное вещество. Диаграмма процесса была построена в непривычных координатах $T(Q)$ (T – температура, Q – подведенное количество теплоты) и имела вид ломаной линии *abcdeb*. От времени чернила выцвели и координатные оси исчезли, однако из пояснений к рисунку следовало, что каждый отрезок параллелен одной из осей координат. Восстановите построением положение осей Q и T и укажите их направления. Опишите ваш способ построения и нарисуйте диаграмму с осями координат и вспомогательными линиями, использованными при построении.

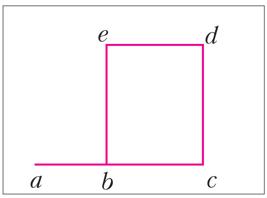


Рис. 19

А.Уймин

Задача 4. Падающая гантель

Два одинаковых маленьких шарика, соединенных невесомым твердым стержнем длиной L, падают на гладкую абсолютно упругую горизонтальную плоскость (рис.20). Непосредственно перед ударом нижнего шарика о плоскость скорости шариков направлены вертикально вниз и равны v_0, а сразу после удара скорости шариков оказались взаимно перпендикулярны.

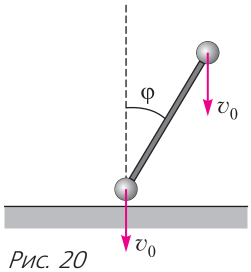


Рис. 20

1) Каковы величина скорости центра масс гантели $v_ц$ и угловая скорость вращения стержня ω сразу после удара?

2) Под каким углом φ к вертикали был наклонен стержень перед ударом?

А.Уймин

Задача 5. Прозрачный шарик

Лучи света, испускаемые точечным источником S, падают на однородный шар из прозрачного материала с показателем преломления n (рис.21). Луч, вышедший из источника под углом α к прямой MN, на которой лежат источник и центр шара, после двух преломлений на границе шара пересекает MN под углом β в точке K, $SK = l$.

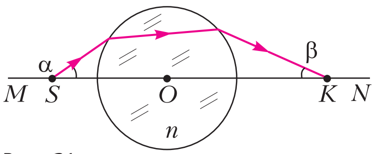


Рис. 21

1) Выразите радиус R шара и расстояние SO от источника до центра шара через параметры l, α, β, n.

2) Вычислите SO и R для значений $n = 2$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $l = 10$ см.

А.Аполонский

Публикацию подготовил
В.Слободянин

«Квант» для младших школьников

Задачи

(*см. «Квант» №2*)

1. 500 м.

Из условия следует, что пока машина B преодолела 300 м до перекрестка, машина A отъехала от перекрестка на 200 м. Значит, когда машина B проедет еще 300 м, машина A проедет еще 200 м и будет на расстоянии 400 м от перекрестка. По теореме Пифагора расстояние между машинами в этот момент будет равно 500 м.

2. Не могли.

Вычтем из всех данных чисел наименьшее из них. Эта операция не изменит разности между числами. Таким образом, можно считать, что по кругу расставили числа $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 3$, $E = 4$, $F = 5$, $G = 6$. Разность 6 – максимальная из возможных разностей, и она может быть получена только как разность $G - A$. Стоящие рядом с разностью 6 единицы могут быть получены, только если рядом с A стоит B, а рядом с G стоит F. Для того чтобы получить разности 2, рядом с F должно стоять число D и рядом с B также должно стоять число D. А это невозможно.

3. См. рис.1.

1) Проведем диагонали квадрата, O – точка их пересечения. 2) Проведем прямую KO, которая пересечет сторону CD в точке M. 3) Проведем прямую CK, которая пересечет диагональ BD в точке P. 4) Проведем прямую AP, которая пересечет сторону BC в точке L. 5) Проведем прямую LO, которая пересечет сторону AD в точке N.

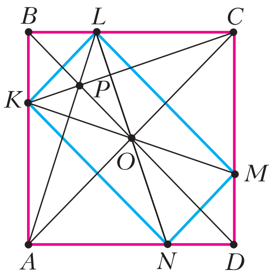


Рис. 1

Прямоугольник $KLMN$ – искомый.

4. Не могла.

Предположим, что сумма могла стать равной 175. Умножим каждое из полученных чисел на 3, тогда сумма станет равной 525. Это будет равносильно тому, что некоторые задуманные ребятами числа остались без изменений, а некоторые умножились на 15. Если число x умножается на 15, то сумма изменяется на $14x$, т.е. на число, кратное 14. Так как часть чисел не менялась, а часть умножалась на 15, то итоговая сумма изменилась на число, кратное 14. Однако изменение суммы, равное $525 - 125 = 400$, на 14 не делится. Противоречие.

Конкурс имени А.П.Савина

(*см. «Квант» №12 за 2019 г.*)

17. Барон может быть прав при всех четных n, начиная с 4, и при всех нечетных n, начиная с 35. Решение будет приведено в одном из следующих номеров журнала.

18. 100.

Перепишем сумму в таком виде:

$$\frac{100}{99}\cdot\left(1+\frac{98}{97}\cdot\left(1+\ldots\cdot\left(1+\frac{4}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{1}\right)\right)\ldots\right)\right).$$

В скобке, которая внутри всех остальных, сумма равна $1+\frac{2}{1}=3$. В предпоследней по вложенности скобке получается $1+\frac{4}{3}\cdot(3)=5$ и так далее: в каждой следующей скобке сумма увеличивается на 2 за счет умножения на дробь и прибавления 1. В итоге получаем $\frac{100}{99}\cdot(99)=100$.

19. Квантик.

Пусть Квантик сделает первый ход в угловую клетку, а дальше делает ходы, симметричные ходам Ноутика относительно диагонали, выходящей из этого угла. После первого хода Квантика картинка обладает таким свойством: она симметрична относительно диагонали и каждая клетка диагонали граничит с четным количеством закрашенных клеток. Это значит, что Ноутик не сможет пойти на диагональ и Квантик сможет ответить ему симметричным ходом, сохранив свойство. Тогда у Квантика и дальше всегда будет ход.

20. Этой задаче посвящена статья «Прыжки в правильном многоугольнике» в этом номере журнала.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. См. рис.2.

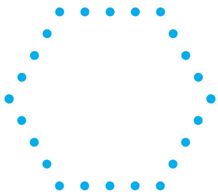


Рис. 2

2. Единице. Любые три точки на поверхности сферы всегда лежат в одном полушарии.

3. На юг и на север вертолет летел по меридианам, а они одинаковы по длине. Параллели же чем севернее, тем короче. Значит, вертолет окажется восточнее Москвы на той же широте.

4. Участок от места встречи до середины пути первый велосипедист проехал за 15 мин, а второй за 30 мин. Значит, скорость первого в два раза больше скорости второго и с начала пути до места встречи он проехал две трети расстояния от A до B, а второй велосипедист – только одну треть. Таким образом, расстояние от места встречи до середины пути составляет шестую часть всего пути от A до B. На весь путь первому велосипедисту потребовалось $15\text{ мин}\cdot 6 = 90\text{ мин} = 1\text{ ч } 30\text{ мин}$.

5. Времена до встреч относятся так же, как сумма скоростей к их разности, т.е. как 9:1. Поэтому скорости относятся как 5:4, и при движении в противоположных направлениях за 4 мин первый пешеход проходит 5/9 дороги, а второй – 4/9. Значит, время обхода всей круговой дороги у первого пешехода 7 мин 12 с, а у второго 9.

6. Время боя часов делится на 2 и на 3, т.е. на 6 секунд. За каждый шестисекундный интервал слышится 4 удара – не считая последнего сдвоенного удара, который относится к следующей шестерке. Самый последний сдвоенный удар считается отдельно. Итак, число интервалов равно $(13-1):4=3$, а полное время боя – 18 секунд.

7. Общее число людей – точный квадрат, поэтому оно не меньше 64, значит, физиков не менее 8. Делители же числа 56 больше 8 – это 14 и 28, но они не подходят, так как 56 + 14 и 56 + 26 не точные квадраты. Итак, физиков было 8.

8. За 55 минут.

9. Возьмем от первой машины одну деталь, от второй две и т.д., от десятой десять. Взвесим их вместе. Если бы все детали были массой по 10 г, то весы показали бы общую массу 550 г. Если первая машина допустила брак, то общая масса станет на 5 г меньше, если вторая – то на 10 г и т.д., если десятая – то на 50 г. Таким образом, по одному взвешиванию можно узнать, какая машина испортилась.

10. Нет, нельзя. Кастрюля еще удерживается на столе, если ее центр тяжести расположен на краю стола, при этом он находится в вершине правильного шестиугольника, вписанного в границу стола (рис.3). Выделенный цветом сектор в точности равен 1/3 площади дна кастрюли, что меньше площади ее соприкосновения со столом.

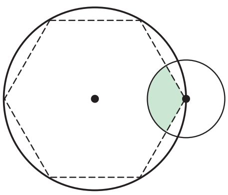


Рис. 3

11. Пусть математикой и физикой интересуются x учеников, тогда интересующихся математикой будет $5x$, физикой $4x$, а всего в классе $x+(4x-x)+$ $+(5x-x)+2=8x+2$ ученика. Единственное число между 20 и 30, дающее при делении на 8 в остатке 2, это 26.

Микроопыт

Можно пройти 10 км на север, 10 км на восток и 10 км на юг. При этом площадь квадрата, полученного соединением конечной и начальной точек пути, составляет как раз 100 км^2, т.е. граница леса неминуемо будет достигнута.

Обманчивая простота простых чисел

1. Приведем два доказательства, из которых первое восходит к самому Евклиду. Оба проводятся методом «от противного»: мы допускаем, что $p_1, p_2, \ldots, p_k$ образуют все множество простых чисел.

Первое доказательство. Рассмотрим число $n = p_1 \ldots p_k + 1$. Его наименьший простой делитель p, отличный от единицы, есть простое число (проверьте это!). Но p отлично от $p_1, \ldots, p_k$, так как n делится на p нацело, а при делении на p_j, $1 \le j \le k$, дает в остатке единицу. Противоречие.

Второе доказательство. В силу основной теоремы арифметики, всякое $n \ge 1$ может быть записано в виде $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \ge 0$. Рассмотрим все числа n, не превосходящие некоторого целого N, $N > 2$. Тогда из очевидных неравенств

$$N \ge n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \ge p_j^{\alpha_j} \ge 2^{\alpha_j}$$

заключаем, что

$$0 \le \alpha_j \le \log_2 N$$

для любого j, $1 \le j \le k$. Следовательно, количество различных наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (или, что то же, количество различных чисел n, $1 \le n \le N$) не превосходит $(\log_2 N + 1)^k$. Но это количество совпадает с N, так что $N \le (\log_2 N + 1)^k$. Беря N достаточно большим, вновь приходим к противоречию.

2. При $n=1$ равенство очевидно. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \ge 2$. Тогда всякий делитель d числа n имеет вид $p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$, где $0 \le \beta_j \le \alpha_j$. Ненулевой вклад в исходную сумму вносят лишь делители вида $d = p_j^{\beta_j}$. Вклад каждого из них равен $\ln p_j$, так что вся сумма совпадает с

$$\alpha_1 \ln p_1 + \ldots + \alpha_k \ln p_k = \ln n.$$

3. Пусть ε дано, $0 < \varepsilon < 0{,}5$.

$(1) \Rightarrow (3)$. Положим $\delta = 0{,}5\varepsilon$ и определим $x_1 = x_1(\varepsilon)$ так, чтобы при всех $x \ge x_1$ выполнялись неравенства

$$(1-\delta)\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < (1+\delta)\frac{x}{\ln x}, \quad \frac{\ln x}{x^{\delta}} < \delta^2, \quad \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} < \delta.$$

Тогда, замечая, что $\pi(u) \le u$ для любого $u > 0$, при $x \ge x_1$ находим

$$\psi(x) \ge \sum_{x^{1-\delta} < p \le x} \ln p \ge (1-\delta)(\ln x) \sum_{x^{1-\delta} < p \le x} 1 =$$

$$= (1-\delta)(\ln x)\left(\pi(x) - \pi\left(x^{1-\delta}\right)\right) >$$

$$> (1-\delta)(\ln x)\left(\pi(x) - x^{1-\delta}\right) >$$

$$> x\left((1-\delta)^2 - \frac{\ln x}{x^{\delta}}\right) > x\left((1-\delta)^2 - \delta^2\right) = (1-\varepsilon)x.$$

Далее, переписав выражение для функции Чебышёва в виде

$$\psi(x) = \sum_{k \ge 1} \sum_{p \le x^{k}} \ln p,$$

заключаем, что вклад от заданного $k \ge 2$ не превосходит

$$\ln\left(x^{1/k}\right) \sum_{p \le x^{1/k}} 1 \le \frac{1}{k} x^{1/k} \ln x$$

(сумма по k, очевидно, конечна: максимальное значение k определяется неравенством $2 \le x^{1/k}$ и потому не превосходит $\log_2 x$). Следовательно, суммарный вклад от $k \ge 2$ не превосходит

$$\sum_{2\le k\le \log_2 x} \frac{1}{k} x^{1/k} \ln x \le \frac{1}{2}\sqrt{x}(\ln x)\log_2 x \le \sqrt{x}(\ln x)^2.$$

Таким образом,

$$\psi(x) \le \sum_{p\le x} \ln p + \sqrt{x}(\ln x)^2 \le \pi(x)\ln x + \sqrt{x}(\ln x)^2 \le$$

$$\le (1+\delta)x + \sqrt{x}(\ln x)^2 = x\left(1+\delta+\frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\right) <$$

$$< (1+2\delta)x = (1+\varepsilon)x,$$

что и требовалось.

(3) $\Rightarrow$ (1). Положим $\delta = 0{,}25\varepsilon$ и определим $x_2 = x_2(\varepsilon)$ так, чтобы при всех $x \ge x_2$ выполнялись неравенства

$$(1-\delta)x < \psi(x) < (1+\delta)x, \quad \frac{(\ln x)^2}{x^\delta} < \delta.$$

Замечая, что $\Lambda(n)/\ln x = 1/k$ для $n = p^k$, находим

$$\pi(x) = \left(\pi(x) - \pi\left(x^{1-\delta}\right)\right) + \pi\left(x^{1-\delta}\right) \le$$

$$\sum_{x^{1-\delta}<n\le x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} + x^{1-\delta} \le \frac{1}{(1-\delta)\ln x}\sum_{x^{1-\delta}<n\le x}\Lambda(n) + x^{1-\delta} \le$$

$$\le \frac{\psi(x)}{(1-\delta)\ln x} + x^{1-\delta} \le \frac{x}{\ln x}\left(\frac{1+\delta}{1-\delta} + \frac{\ln x}{x^\delta}\right) <$$

$$< \frac{x}{\ln x}\left(1+2\delta+\frac{\ln x}{x^\delta}\right) < (1+3\delta)\frac{x}{\ln x} < (1+\varepsilon)\frac{x}{\ln x}.$$

Рассмотрим, наконец, сумму

$$S = \sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{\ln n}.$$

Нетрудно видеть, что

$$S = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt[3]{x}\right) + \ldots$$

(число слагаемых не превосходит $\log_2 x$). Подобно тому, как это делалось выше, можно показать, что

$$\pi(x) < S < \pi(x) + \sqrt{x}\ln x.$$

Поэтому

$$\pi(x) > S - \sqrt{x}\ln x \ge \frac{1}{\ln x}\sum_{n\le x}\Lambda(n) = \frac{\psi(x)}{\ln x} - \sqrt{x}\ln x \ge$$

$$\ge (1-\delta)\frac{x}{\ln x} - \sqrt{x}\ln x = \frac{x}{\ln x}\left(1-\delta-\frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\right) >$$

$$> (1-2\delta)\frac{x}{\ln x} > (1-\varepsilon)\frac{x}{\ln x},$$

что и требовалось.

4. а) Пусть $s = 1+\delta$, где $\delta > 0$. Часть исходной суммы, отвечающая числам n, $2^k < n \le 2^{k+1}$, содержит 2^k слагаемых, каждое из которых не превосходит 2^{-ks}. Значит, суммарный вклад таких n ограничен сверху величиной $2^k \cdot 2^{-ks} = 2^{-k\delta}$. Суммирование по всем $k \ge 0$ дает

$$\zeta(s) \le 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k\delta} = 1 + \frac{1}{1-2^{-\delta}} < +\infty.$$

б) Вклад в исходную сумму от слагаемых с условием $2^k < n \le 2^{k+1}$ оказывается не меньшим величины $2^k \cdot 2^{-(k+1)} = 0{,}5$. Суммирование по всем $k \ge 0$, для которых $2^{k+1} \le N$, дает

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \ge \frac{1}{2}(\log_2 N - 1).$$

Отсюда легко следует искомый результат.

5. Пусть $s = 1+\delta$, где $\delta > 0$. Задавшись произвольным ε, $0 < \varepsilon < 0{,}5$, докажем, что при достаточно большом N, $N \ge N_0(\varepsilon,\delta)$, произведение

$$P_N = \prod_{2\le p\le N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

будет отличаться от $\zeta(s)$ не более чем на ε. Обозначим

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}.$$

Из замечания к задаче 3 следует, что при $N \ge N_1(\varepsilon,\delta)$ для суммы S_N будут выполнены неравенства: $\zeta(s) - \varepsilon < S_N < \zeta(s)$. Далее, по формуле для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$P_N = \prod_{2\le p\le N}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{2\le p\le N}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots\right).$$

При раскрытии скобок в последнем произведении возникнет сумма слагаемых вида $\left(p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}\right)^{-s}$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \ge 0$, а $p_1,\ldots,p_k$ – различные простые числа, не превосходящие N. В силу основной теоремы арифметики, все числа $n = p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, отвечающие таким слагаемым, различны. Кроме того, в сумме встретятся все дроби $1/n^s, 1 \le n \le N$. Следовательно,

$$P_N = S_N + Q_N, \text{ где } 0 < Q_N \le \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Вклад в последнюю сумму от чисел n с условием $2^k N < n \le 2^{k+1}N$ ($k \ge 0$) не превзойдет $2^k N \cdot \left(2^k N\right)^{-s} = \left(2^k N\right)^{-\delta}$. Суммируя по всем $k \ge 0$, найдем

$$Q_N \le \frac{1}{N^\delta}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k\delta}} = \frac{1}{N^\delta}\cdot\frac{1}{1-2^{-\delta}}.$$

Выбирая $N_2 = N_2(\varepsilon,\delta)$ так, чтобы при всех $N \ge N_2$ правая часть последнего неравенства не превышала ε, при $n \ge N_0 = \max(N_1, N_2)$ получим

$$\zeta(s) - \varepsilon < S_N < P_N \le S_N + \varepsilon < \zeta(s) + \varepsilon,$$

что и требовалось.

Как выглядит график синуса?

1. См. рис.4 (здесь $m = 0, \ldots, 11$).

2. См. рис.5.

Комментарий. Наблюдаются те же самые «фазовые переходы», что у графиков $y = \sin\left(\mathrm{round}\left(10^m\pi\right)x\right)$ (здесь $\mathrm{round}(t)$ обозначает ближайшее к t число, $m = 0, \ldots, 15$):

- при малых m мы видим настоящие синусы;
- дальше наступает «турбулентная фаза»;
- ее сменяет фаза многозначных медленно меняющихся синусов;
- при $m = 10$ имеем двузначный синус, и это связано с тем, что шаг по x равен 2^{-10};
- дальше идут медленно меняющиеся однозначные синусы.

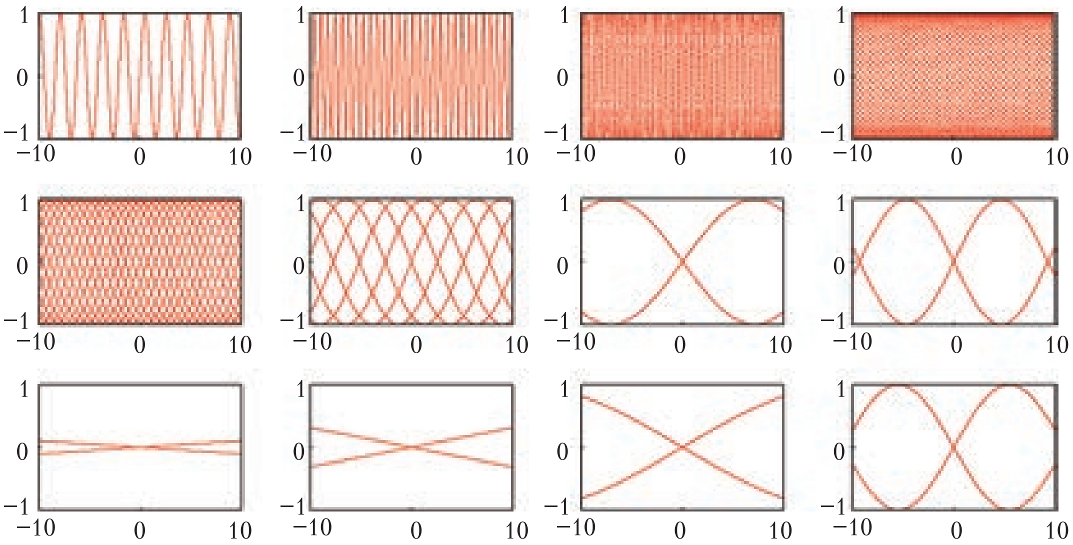


Рис. 4

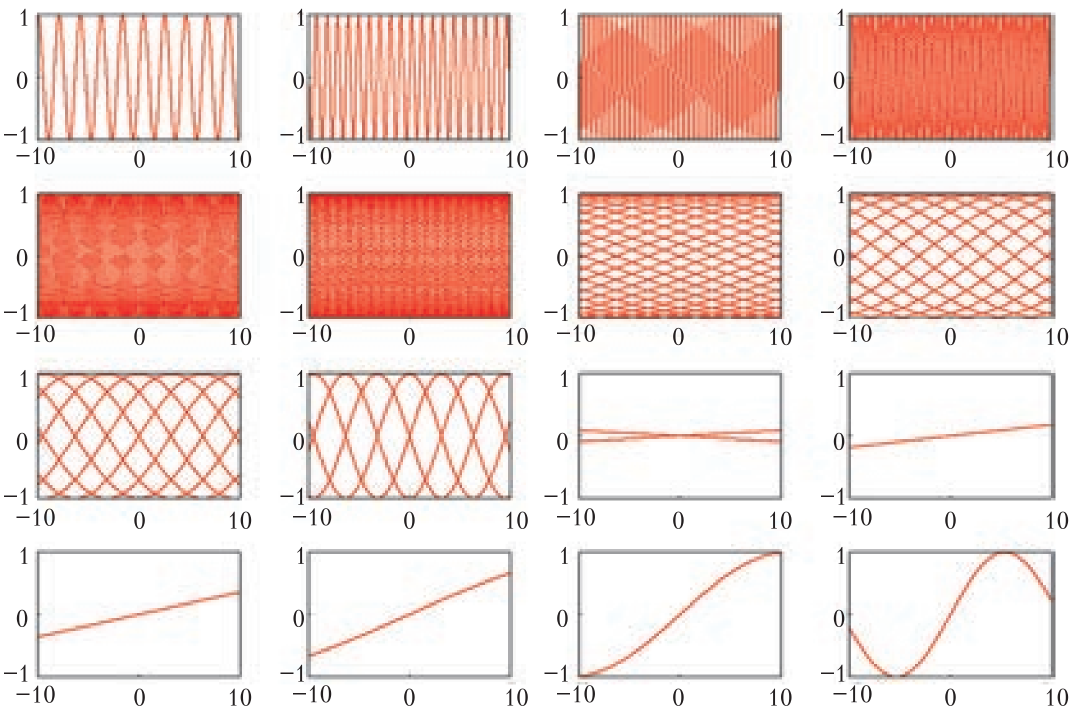


Рис. 5

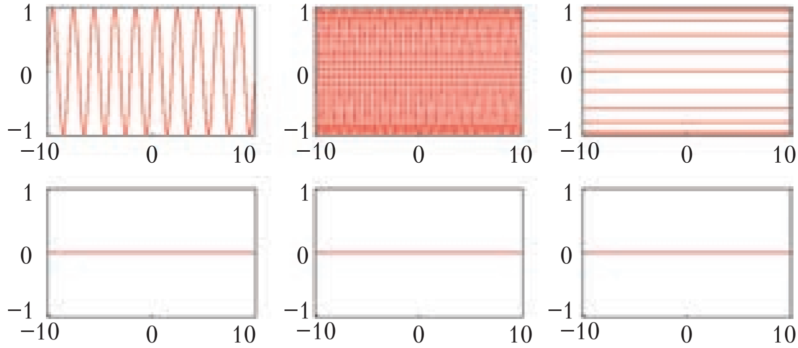


Рис. 6

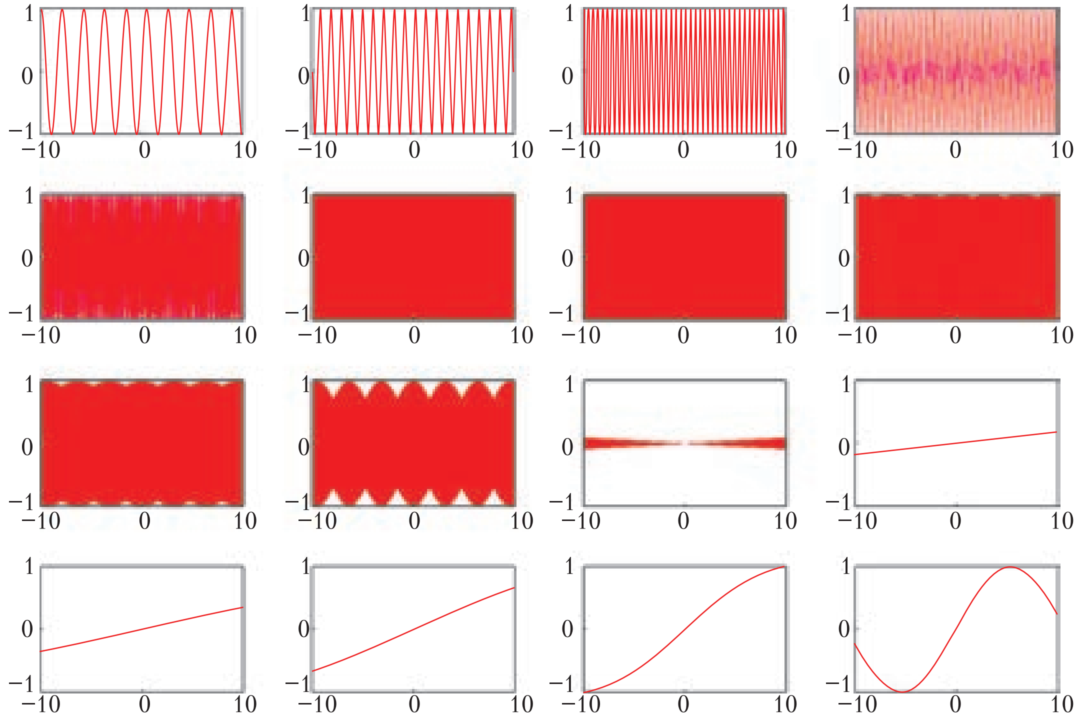


Рис. 7

3. См. рис.6 (здесь $m = 0, \ldots, 5$).

4. См. рис.7 (здесь $y = \sin(\mathrm{round}(2^m\pi)x)$, $m = 0, \ldots, 15$).

Региональный этап XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

1. Приведем пример, как Малыш может добиться такого распределения. На первой минуте он делит кучу из 10 конфет на две кучи по 5 конфет. Далее на 2-й, 4-й, 6-й, 8-й минутах он соединяет кучи $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 6$ соответственно, а на 3-й, 5-й, 7-й, 9-й минутах делит только что полученную кучу из 10 конфет на две равные части. На 9-й минуте он получает 11 куч по 5 конфет.

2. При $n = 202$.

Заметим, $990^2 + 1000^2 + 1010^2 = (1000 - 10)^2 + (1000^2 + (1000 + 10)^2 = 3 \cdot 1000^2 + 2 \cdot 10^2$, и это больше трех миллионов. С другой стороны, $989^2 + 999^2 + 1009^2 = (1000 - 11)^2 + (1000 - 1)^2 + (1000 + 9) = 3 \cdot 1000^2 - 6 \cdot 1000 + (9^2 + 1^2 + 11^2)$, что меньше трех миллионов.

Если неотрицательных чисел на доске не меньше чем 102, то три наибольших из них не меньше чем $99 \cdot 10 = 990$, $100 \cdot 10 = 1000$ и $101 \cdot 10 = 1010$ соответственно. Тогда по замечанию выше сумма их квадратов больше трех миллионов, что невозможно. Поэтому неотрицательных чисел на доске не больше 101. Аналогично, отрицательных чисел не больше 101. Таким образом, общее количество чисел не больше чем 101 + 101 = 202.

Пример при n = 202 дают числа −1009, −999, −989, …, −9, 9, 19, …, 999, 1009. Из замечания выше он подходит.

6. Пусть Миша, пробежав полкруга, развернется и побежит назад. Пока он пробежит полкруга обратно, он встретит Петю. Когда Миша добежит до точки старта, Петя еще не добежит до нее. Значит, если Миша продолжит бежать в том же направлении, он встретит Петю в какой-то точке на расстоянии d от старта. Пусть он пробежит еще положительное расстояние ε, меньшее $0{,}01d$, а затем развернется (он может это сделать). Тогда, пока Петя преодолевает оставшееся расстояние d, Миша пробежит $1{,}02d > \varepsilon + (d + \varepsilon)$. Значит, он уже минует точку старта, а значит, перед этим он поравняется с Петей в третий раз.

7. 1010.

Рассмотрим двух хамелеонов, говоривших подряд. Один из них в момент высказывания был коричневым; действительно, если бы они оба были зелеными, то после высказывания первого количество зеленых хамелеонов не изменилось бы и второй назвал бы то же число, что и первый. Разобьем всех хамелеонов на 1009 пар, говоривших подряд, и еще одного хамелеона; поскольку в каждой паре был коричневый, исходное количество зеленых хамелеонов было не больше 2019 − 1009 = 1010.

Осталось показать, что 1010 зеленых хамелеонов быть могло. Пронумеруем хамелеонов в порядке их высказываний. Пусть все нечетные хамелеоны – зеленые, а все четные – коричневые. Тогда первый скажет 1010, второй – 1 и станет зеленым. Тогда третий скажет 1011, а четвертый – 2 и станет зеленым и так далее. В результате нечетные хамелеоны произнесут все числа от 1010 до 2019, а четные – все числа от 1 до 1009.

8. 60°.

Из симметрии треугольники CLD и SLD равны, поэтому $DS = DC$, $\angle CDL = \angle SDL$ и $\angle DLC = \angle DLS$ (рис.8). Поскольку четырехугольник $ALDB$ вписан в окружность, имеем $\angle BAL = \angle LDC$. На хорды AL и DL этой окружности опираются равные углы, поэтому $AL = DL$.

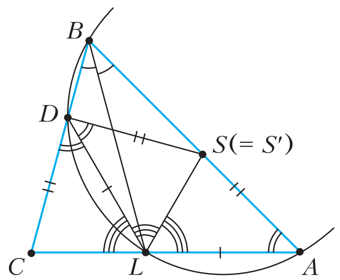


Рис. 8

Отложим на луче AB отрезок $AS' = DS = DC$. Тогда треугольники $S'LA$ и SLD равны по двум сторонам ($AS' = DS$, $AL = DL$) и углу между ними. Значит, $LS' = LS$ и $\angle AS'L = \angle DSL$. Если точки S' и S не совпадают, то в равнобедренном треугольнике LSS' углы при основании SS' равны, поэтому $\angle AS'L = \angle BSL$. Значит, $\angle DSL = \angle BSL$, т.е. D лежит на AB; это невозможно.

Итак, $S' = S$, и $\angle ALS = \angle DLS = \angle DLC$. Сумма этих трех углов равна $180°$, поэтому они равны по $60°$. Отсюда $\angle ABC = 180° - \angle ALD = 60°$.

9. Нет, не может.

Докажем следующую несложную лемму.

Лемма. *Если n-угольник разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники, количество которых равно t, то $n = td + 2$.*

Доказательство. Индукция по t; база при $t = 1$ очевидна.

Сделаем шаг индукции. Предполагая, что утверждение верно для количеств $(d+2)$-угольников, равных 1, 2, …, $t - 1$, рассмотрим разрезание n-угольника P на t таких многоугольников. Возьмем в разрезании любую диагональ. Она делит наш n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2, один из которых разрезан на s, а другой – на r многоугольников, где $s + r = t$, причем $s < t$, $r < t$. По предположению индукции в многоугольниках P_1 и P_2 соответственно $sd + 2$ и $rd + 2$ сторон, а значит (поскольку P_1 и P_2 склеены по стороне), в многоугольнике P всего $(sd+2)+(rd+2)-2 = (s+r)d + 2 = td + 2$ сторон.

Перейдем к задаче. Предположим противное: пусть некоторый правильный многоугольник Q разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники ($d \ge 3$ – нечетно), среди которых есть хороший $(d+2)$-угольник $A_0A_1\ldots A_{d+1}$ – пусть, скажем, сторона $A_{d+1}A_0$ параллельна некоторой другой стороне A_kA_{k+1}, где $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$.

Опишем вокруг Q окружность. В силу параллельности $A_{d+1}A_0 \parallel A_kA_{k+1}$, меньшие дуги A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ равны.

Пусть на меньшей дуге A_0A_1 расположены (в порядке следования от A_0 к A_1) m вершин многоугольника Q, назовем их $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Возможно, что $m = 0$. Если $m > 0$, вырежем из многоугольника Q многоугольник $A_0B_1B_2\ldots B_mA_1$. Видим, что этот $(m+2)$-угольник оказывается разбитым непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники. Согласно лемме, m делится на d (это верно и при $m = 0$).

Аналогично доказываем, что внутри каждой из дуг (не считая концов дуг) $A_1A_2, \ldots, A_{k-1}A_k$ количество вершин многоугольника Q кратно d. Тогда количество вершин многоугольника Q внутри (меньшей) дуги A_0A_k (не считая самих концов дуг A_0 и A_k) равно $td + k - 1$ для некоторого целого t. Аналогичный подсчет количества вершин многоугольника Q, лежащих внутри (меньшей) дуги $A_{k+1}A_{d+1}$, дает $sd + d - k - 1$. Приравнивая, получаем $td + k -$

$-1 = sd + d - k - 1$, откуда $2k$ делится на d. В силу нечетности d получаем, что k делится на d; это противоречит условию $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$.

10. Продолжим нумерацию циклически: будем считать, что $x_{i+9} = x_i$.

Зафиксируем индекс i и обозначим для простоты $a = x_i$, $b = x_{i+1}$, $c = x_{i+2}$. Заметим, что при $a \ge c$ выполнено неравенство

$$ac + 2bc + b^2 \le ac + ab + bc + b^2 = (a+b)(b+c),$$

а при $a \le c$ – неравенство

$$ac + 2bc + b^2 \ge ac + ab + bc + b^2 = (a+b)(b+c).$$

Значит, в любом случае имеем

$$\frac{a-c}{ac+2bc+b^2} \ge \frac{a-c}{(a+b)(b+c)} = \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b},$$

т.е.

$$\frac{x_i - x_{i+2}}{x_i x_{i+2} + 2x_{i+1}x_{i+2} + x_{i+1}^2} \ge \frac{1}{x_{i+1}+x_{i+2}} - \frac{1}{x_i + x_{i+1}}.$$

Складывая такие неравенства при всех $i = 1, 2, \ldots, 9$, получаем требуемое.

10 класс

1. Заметим, что $3990 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot19 = 1\cdot6\cdot5\cdot7\cdot19$ и $6+5+7+1=19$. Поэтому подойдет любое четырехзначное число, в записи которого по одной единице, шестерке, пятерке и семерке, например 1567.

2. Предположим противное: множества A и B не пересекаются. Тогда их объединение содержит $2n$ различных натуральных чисел. Следовательно, сумма S всех элементов объединения множеств A и B будет не меньше суммы $1+2+\ldots+2n = n(2n+1)$. С другой стороны, по условию $S = 2n^2$, что меньше чем $n(2n+1)$. Противоречие.

6. Да, можно.

Первым действием дописываем $\cos^2 x$, вторым – $\cos^2 x + \cos x$. Поскольку $\cos\pi = -1$, значение последнего выражения при $x = \pi$ равно 0.

7. Пусть $ABXY$ – один из данных прямоугольников, а O – центр окружности, на которой лежат восемь вершин из условия задачи (рис.9). Тогда O лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку XY. Но l совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку AB. Поскольку O лежит на l, имеем $OA = OB$. Аналогично доказываем, что $OB = OC$ и $OC = OD$. Тогда O равноудалена от всех вершин четырехугольника $ABCD$, значит, $ABCD$ вписан в окружность с центром O, что и требовалось доказать.

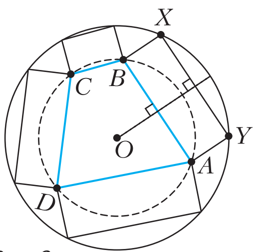


Рис. 9

8. Нет, нельзя.

Решение будет состоять из трех шагов (A, B, C).

A) Докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть при некоторых натуральных a, b, c квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет целые корни. Тогда b и c делятся на a.*

Доказательство. По теореме Виета $b/a = -(x_1 + x_2)$ и $c/a = x_1x_2$ являются целыми числами. Лемма доказана.

B) Предположим, что натуральные числа $k+1$, $k+2$, …, $k+3n$ (при некотором целом неотрицательном k) нужным образом расставлены в качестве коэффициентов данных квадратных трехчленов $a_ix^2 + b_ix + c_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Для определенности пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тогда $a_1 \ge k+1$, откуда $a_2 \ge k+2$, …, $a_n \ge k+n$. Из леммы следует, что минимальное из чисел b_n, c_n не меньше чем $2a_n$, а максимальное, назовем его M, не меньше чем $3a_n$. Но M должно быть среди чисел $k+1$, $k+2$, …, $k+3n$. Получаем $3(k+n) \le 3a_n \le M \le k+3n$. Отсюда $k \le 0$, а значит, $k = 0$. Кроме того, $a_n = n$, откуда сразу следует, что $a_i = i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

C) Среди $3n$ подряд идущих чисел менее $3n/2 + 1$ четных. С другой стороны, зная, что a_i пробегают числа $\{1, 2, \ldots, n\}$, получим оценку снизу на количество C четных чисел среди всех коэффициентов. Заметим, что в каждой из n троек (a_i, b_i, c_i) хотя бы одно четное число, иначе значение трехчлена $a_ix^2 + b_ix + c_i$ в любой целой точке будет нечетно, в частности такой трехчлен не может иметь целых корней. Если же a_i четно (количество соответствующих троек (a_i, b_i, c_i) равно $[n/2]$), то b_i и c_i, в силу леммы, тоже четные, значит, в такой тройке (a_i, b_i, c_i) все три коэффициента четные. Итого $C \ge n + 2[n/2] \ge 2n - 1$. Сравнивая верхнюю и нижнюю оценки, имеем $3n/2 + 1 > C \ge 2n - 1$, откуда $n < 4$. Противоречие.

10. При $n = 8$.

Мы будем называть многочлен вида $ax^2 + bx + c$ просто *многочленом*, а график такого многочлена – просто *графиком*. Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Через любые три точки (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ с разными абсциссами проходит ровно один график.*

Доказательство. Один график, проходящий через эти точки, найдется всегда – нетрудно проверить, что подходит многочлен

$$b_1\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)} + b_2\frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + b_3\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

С другой стороны, если через три точки проходят графики двух разных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то разность $f(x) - g(x)$ имеет три корня a_1, a_2, a_3, что невозможно.

Из леммы следует, что через любые *две* точки с разными абсциссами проходит бесконечно много графиков и любые два из них пересекаются только по этим двум точкам.

Перейдем к решению. Будем считать, что Петя задумал два графика, за ход Вася называет Пете число t, а Петя отмечает точку с абсциссой t на одном из графиков. Можно считать, что на разных ходах Вася называет разные t (иначе Петя повторит ответ).

Рассмотрим ситуацию после k ходов. Назовем пару графиков *подходящей*, если объединение этих графиков содержит все отмеченные Петей точки.

1) Покажем, что $k \geq 8$. Мы будем считать, что Петя изначально не рисует никаких графиков, а просто отмечает некоторые точки с данными абсциссами. Покажем, как ему действовать, чтобы после 7 ходов нашлись две подходящие пары графиков такие, что все 4 графика различны; это и будет означать, что Вася не смог добиться требуемого, ибо Петя мог нарисовать любую из этих пар. Будем обозначать точку, появляющуюся после i-го хода, через $A_i = (a_i, b_i)$. На первых двух ходах Петя выбирает $b_1 = b_2 = 0$. На следующих 4 ходах Петя отметит точки A_3 и A_4 на графике F_+ многочлена $f_+(x) = (x - a_1)(x - a_2)$ и точки A_5 и A_6 – на графике F_- многочлена $f_-(x) = -(x - a_1)(x - a_2)$.

Седьмым ходом Петя выбирает точку A_7, не лежащую ни на одном из графиков, проходящих через какие-то три точки из A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6. Тогда существуют графики G_+ и G_-, проходящие через тройки точек A_5, A_6, A_7 и A_3, A_4, A_7; согласно нашему выбору, эти графики различны и отличаются от F_+ и F_-. Значит, пары (F_+, G_+) и (F_-, G_-) – подходящие и все эти четыре графика различны, т.е. Вася не сможет добиться требуемого.

2) Покажем, как Васе добиться требуемого за 8 ходов. На первых 7 ходах он называет 7 произвольных различных чисел. Назовем график *подозрительным*, если он проходит хотя бы через три точки, отмеченные Петей на этих ходах. Назовем число *a плохим*, если два различных подозрительных графика имеют общую точку с абсциссой a. Существует лишь конечное количество подозрительных графиков и, следовательно, лишь конечное количество плохих чисел.

На восьмом ходу Вася называет любое неплохое число a_8. После того как Петя отметит восьмую точку, возможны два случая.

Случай 1. Существует график G многочлена $f(x)$, содержащий пять из восьми отмеченных точек. Три из этих точек лежат на одном из Петиных графиков; по лемме, этот график совпадает с G. Значит, Васе достаточно назвать многочлен $f(x)$.

Случай 2. Такого графика нет. Это значит, что на каждом из Петиных графиков лежит ровно по 4 отмеченных точки; поэтому оба этих графика подозрительны. Докажем, что существует единственная пара подозрительных графиков, содержащих в совокупности все 8 отмеченных точек; тогда Васе достаточно назвать любой из соответствующих многочленов.

Пусть (G_1, H_1) и (G_2, H_2) – две такие пары, причем H_1 и H_2 содержат A_8. Согласно выбору числа a_8, это может произойти лишь при $H_1 = H_2$. Но тогда каждый из графиков G_1 и G_2 проходит через 4 отмеченные точки, не лежащие на H_1, и они совпадают согласно лемме. Значит, и наши пары совпадают.

11 класс

1. При $n = 17$.

Числа $-11, -7, -6, -5, \ldots, 6, 7, 11$ дают пример при $n = 17$.

Допустим, что есть хотя бы 18 чисел с таким свойством. Тогда какие-то 9 из них будут одного знака (все положительны или все отрицательны). Среди этих 9 чисел модули двух наибольших будут не меньше 8 и 9 соответственно. Тогда их произведение не может быть равно 77.

3. Построим точку E', симметричную точке E относительно стороны AC (рис.10). Заметим, что точка F лежит на прямой DE', ибо $\angle DFC = \angle EFA = \angle E'FA$ в силу симметрии. Из прямоугольных треугольников ABC и BCH получаем $\angle E'BC = 90° - \angle ACB = \angle BAC$. Теперь заметим, что $\angle BAD = \angle CAE = \angle CAE'$. Значит, $\angle DAE' = \angle CAE' + \angle DAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle BAC = \angle E'BC$. Это означает, что четырехугольник $ABDE'$ – вписанный. Следовательно, поскольку $\angle ABD = 90°$, то $\angle AE'D = 90°$. Тогда в силу симметрии $\angle AEF = 90°$, что и требовалось доказать.

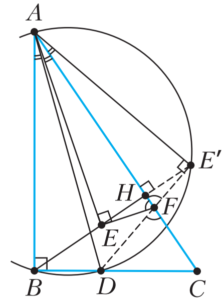


Рис. 10

5. $\dfrac{N(N-1)(2N+5)}{6}$.

Заметим, что число N^2 большое, а 1 – малое, их разность равна $N^2 - 1$. Вычеркнем строку, содержащую N^2, и столбец, содержащий 1. Тогда если A и B – наибольшее и наименьшее из оставшихся $(N-1)^2$ чисел, то $A - B \geq (N-1)^2 - 1$. При этом A не больше большого числа своей строки (в исходной таблице), а B – не меньше малого числа своего столбца, так что разность этих большого и малого чисел также не меньше, чем $(N-1)^2 - 1$. Снова вычеркнем строку, содержащую A, и столбец, содержащий B, и повторим рассуждения.

Продолжая так дальше, получим, что интересующая нас разность S не меньше чем $N^2 - 1 + (N-1)^2 - 1 + \ldots + 1^2 - 1$. Используя формулу суммы квадратов первых N натуральных чисел, получим $S \geq N(N-1)(N+5)/6$.

Осталось доказать, что оценка достигается. Построим соответствующий пример индукцией по N. База при $N=1$ очевидна. Для перехода рассмотрим (уже построенный) пример таблицы $(N-1)\times(N-1)$ и увеличим все числа в нем на $N-1$ (получились числа от N до $N(N-1)$, а разность S не изменилась). Дополним эту таблицу новой строкой и новым столбцом; в новой строке расставим числа $N^2-N+1, N^2-N+2, \ldots, N^2$, а в оставшихся клетках нового столбца – числа $1, 2, \ldots, N-1$. Нетрудно видеть, что числа, бывшие большими и малыми в прежней таблице, такими и остались, и добавились большое число N^2 и малое число 1. Значит, S увеличилась на N^2-1, что и требовалось.

6. Например, $\left(x^4+1\right)(x+1)-\left(x^4+1\right)=x\left(x^4+1\right)$.

7. Можно.

Покрасим числа $2^s(4k+1)$, где $s,k=0,1,\ldots$, в первый цвет, а $2^s(4k+3)$, где $s,k=0,1,\ldots$, – во второй. Покажем, что никакие два числа первого цвета не дают в сумме степень двойки; рассуждения для чисел второго цвета аналогичны.

Пусть наши два числа – это $2^s(4k+1)$ и $2^t(4l+1)$, где $s \geq t$. Если $s>t$, то сумма $2^s(4k+1)+2^t(4l+1)=2^t\left(2^{s-t}(4k+1)+4l+1\right)$ содержит нечетный множитель $2^{s-t}(4k+1)+4l+1 \geq 3$, поэтому она не может быть степенью двойки. Если же $s=t$, то $k \neq l$, и сумма $2^s(4k+1)+2^s(4l+1)=2^{s+1}(2(k+l)+1)$ тоже содержит нечетный множитель $2(k+l)+1 \geq 3$ и не может быть степенью двойки.

9. Обозначим данные сферы через Ω_1, Ω_2 и Ω_3 так, чтобы они касались плоскости α в точках D, E и F соответственно. Пусть C – точка касания сфер Ω_1 и Ω_2. Обозначим через β плоскость, перпендикулярную α и содержащую прямую DE. Тогда центры сфер Ω_1 и Ω_2 и точка C лежат в плоскости β.

Пусть эта плоскость пересекает сферы Ω_1 и Ω_2 по окружностям ω_1 и ω_2 (рис.11). Тогда прямая DE – общая внешняя касательная к этим двум окружностям, а они сами касаются в точке C. Пусть общая

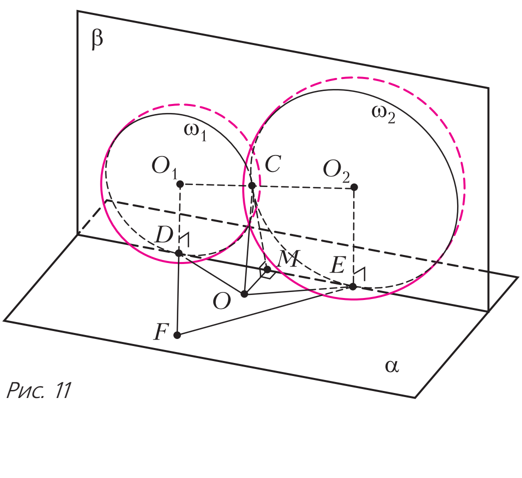


Рис. 11

касательная к ним в точке C пересекает отрезок DE в точке M. Тогда $MD=MC=ME$.

Обозначим через O центр описанной окружности треугольника DEF, а через R – ее радиус. Пусть $O \neq M$. Точка M – середина отрезка DE, поэтому $\angle OME=90°$. Поскольку $\alpha \perp \beta$, то $\angle OMC=90°$. Значит, прямоугольные треугольники OMC и OME равны по двум катетам, поэтому $OC=OE=R$. В случае $O=M$ также имеем $OC=R$.

Таким образом, на сфере Ω с центром в точке O и радиусом R лежит точка C. Аналогично, на этой сфере лежат точки A и B. Следовательно, описанная окружность треугольника ABC также лежит на сфере Ω, поэтому ее радиус не превосходит R.

Наконец, точки A, B, C лежат в одном полупространстве относительно плоскости α, поэтому точка O не лежит в плоскости ABC. Это означает, что верно строгое неравенство.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 201065

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8

Тел.: (831) 216-40-40

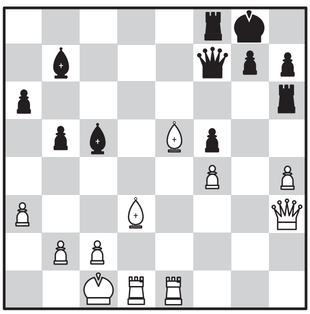
ПраздниК ВЕСНЫ

В марте традиционно отмечается Международный женский день, который ассоциируется у многих с началом весны, и сегодняшний выпуск мы посвятим творчеству прекрасной половины человечества. Начнем с партии, получившей первый приз за красоту.

А.Музычук – О.Кобо

Гибралтар, 2020

1. e4 c5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♘c3 e6 4. d4 cd 5. ♘d4 ♛c7 6. f4 a6 7. ♘c6 ♛c6 8. ♗d3 b5 9. ♕e2 ♝b7 10. ♗d2 ♝c5 11. a3 ♞e7 12. 0-0-0 0-0 13. h4!? Относительно редкий ход, но в случае чаще встречающегося 13. ♕h5 белым трудно продолжить атаку после 13…f6. **13… f5 14. g4 d5! 15. gf ef 16. ed ♞d5 17. ♘d5 ♛d5 18. ♖he1!** (Белые должны играть активно, в случае защитного 18. ♔b1 черные сами занимают линию е: ♜ae8.) **18… ♛f7 19. ♗c3 ♜fe8 20. ♗e5 ♜e6?!** (предпочтительнее 20… ♜ae8 21. ♔b1 ♝d5, централизуя фигуры) **21. ♕f1 ♜f8** (правильное 21…h5! позволяло заблокировать королевский фланг путем g6 и ♚h7) **22. ♕h3 ♜h6.**

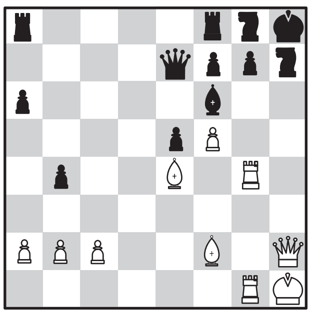


23. ♗f5!! Гром среди ясного неба, позиция черных мгновенно разрушается. **23… ♛f5 24. ♖d7! ♜g6** (ферзя брать нельзя из-за мельницы и мата: 24…♛h3 25. ♖g7 ♚h8 26. ♖g6 ♜f6 27. ♗f6×) **25. ♕b3+ ♚h8. 26. ♖b7 ♝f2 27. h5 ♜g3 28. ♕d5 h6 29. ♖e2 ♜g1+ 30. ♔d2 ♝h4 31. ♕d4 ♜c8 32. ♗g7+ ♚g8 33. ♕g1!** Четко рассчитав смелый побег короля, белые добиваются решающего материального преимущества. **33… ♜c2+ 34. ♔e3 ♛h3+ 35. ♔d4 ♝f2+ 36. ♖f2 ♜c4+ 37. ♔d5.** На 37…♛f5+ белые ответят своим нападением 38. ♗e5+ с матом, поэтому **черные сдались**.

П.Шувалова – А.Афонасьева

Мумбаи, 2019

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 c:d4 4. ♘d4 ♞f6 5. ♘c3 a6 6. ♗e2 e5 7. ♘b3 ♝e7 8. 0-0 0-0 9. ♔h1 ♝e6 10. f4 ♛c7 11. f5 ♝d7 12. g4 ♝c6 13. ♗f3 h6 14. h4?! Неточность, сильнее 14. g5 hg 15. ♗g5 b5 ♖g1 с преимуществом. **14… ♞h7 15. g5.** Теперь белые вынуждены жертвовать две пешки ради продолжения атаки. **15…hg 16. ♖g1 gh 17. ♗h6 ♝f6 18. ♕d2 ♚h8 19. ♗e3 b5 20. ♖g4 b4 21. ♘d5 ♝d5 22. ♕d5 ♞c6 23. ♖ag1 ♞e7 24. ♕d2 d5?** Черные неверно оценивают позицию, стоило контратаковать не в центре, а на ферзевом фланге: 24… ♜ac8 с дальнейшим ♛c2 и угрозами по второй горизонтали. **25. ♕h2 ♛d7?** (сильнее 25… ♜ae8, или ♜fd8, теперь же черные попадают под темповую атаку конем) **26. ♘c5 ♛c8** (активнее 26…♛b5) **27. ♗f2 de?!** (надежнее 27…♞g8, однако и в этом случае инициатива на стороне белых) **28. ♗h4 ♞g8 29. ♗e4 ♛c5 30. ♗f2 ♛e7.**

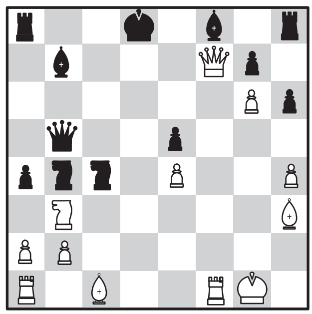


Допускает эффектную комбинацию, однако хороший ход за черных предложить уже сложно. **31. ♖g7! ♝g7 32. ♕h7+!** В учебники по тактике! Завлекая короля под вскрытый шах, белые ставят форсированный мат. **32… ♚h7 33. f6+ ♚h6 34. ♗e3+ ♚h5 35. ♗f3+ ♚h4 36. ♗f2+.** Не желая получить неизбежный мат на следующем ходу, **черные сдались**.

В.Гунина – М.Себаг

Сент-Луис, 2019

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♞f6 5. ♘c3 a6 6. ♘b3 e6 7. g4 b5 8. g5 ♞fd7 9. ♗g2 ♝b7 10. f4 ♞c6 11. h4 ♞b6 12. ♕g4 b4 13. ♘e2 ♞c4 14. 0-0 a5 15. c3 e5 16. fe de 17. ♕f3 ♛c7 18. cb ♞b4 (точнее 18…ab 19. ♘g3 g6 20. ♕f6 ♜g8, ограничивая активность белых) **19. ♘c3 a4 20. ♘b5 ♛d7?** (надежнее 20…♛e7 21. ♘d2 ♝a6 22. ♘c4 ♝b5; теперь же белые активизируют слона) **21. ♗h3! ♛b5 22. ♕f7+ ♚d8 23. g6 h6.** Точнее 23…♝e7 24. ♗g5 ♝g5 25. hg hg 26. ♖ad1+, но и в этом случае защищаться черным сложно. Ход в партии допускает эффектную жертву, полностью разрушающую позицию черных.



24. ♗h6! gh 25. ♖ad1+ ♞d5 26. g7 ♝g7 27. ♕g7 ab 28. ♖f7 ♛c5+ 29. ♔h2 ♚e8 30. ♖f8+. Жертва ладьи в этой яркой партии – как вишенка на праздничном торте, любое взятие ведет к мату после ♕d7, поэтому **черные сдались.**

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Оказывается, даже простое истечение воды через отверстие в сосуде может таить в себе неожиданные сюрпризы.

Как течет вода?

ISSN 0130-2221 20003

(Подробнее – на с. 26 внутри журнала)